奥赛经典

数学奥林匹克中的应试技巧

李博杰 著

数之理论坛

boj.5d6d.com

引言

在数学竞赛中，经常有题目难以解出的情况。此时，轻言放弃，意味着考试的失分，一道 50 分的二试解答题很可能决定奖项的取得；继续做，又毫无头绪，有可能耽误更多的时间。此时，“抢分”便成为了我们唯一的出路。

所谓“抢分”，就是在一时没有好的思路的情况下，尽可能获得思路；即使没有思路，也能尽可能得到部分分数。

在数学学科竞赛中，分数是最重要的。时常见到，有些同学能力很高，经常解出难题，但每逢考试，得分却不理想，这不能不说是一种遗憾。而另一些同学平时不见起色，考试却每每高分，令人费解。对此种矛盾，本文将略谈一二。

本书拟从数学竞赛“抢分”的实用策略谈起，以提高数学竞赛中获得高分的能力。由于水平有限，难免有错误疏漏之处，敬请读者指教。

我们希望更多的选手参加竞赛是真正出于对数学的兴趣，而不是功利的目的。这样，我们的竞赛才回归它本身的意义。我衷心希望，各位读者能细细品味数学竞赛中的美感，陶冶科学世界的情操。

李博杰　2009 年 1 月

目录

第一章　表达规范——抢分的基础

表达规范，就是学习标准答案的解题模式。要使解答具有层次性，分条阐述。不要几个式子加一个得数，这样很容易误判。表达规范，要求书写、卷面“排版”整齐。我们看到，在标准答案中由于计算机排版，行距列距、字体整齐，利于观看，我们也很容易理解。

笔者初中有评阅数学试卷的历史，同样是一个解答过程，有的试卷愿意阅读，有的只想尽快阅完放弃。在高中联赛的阅卷过程中，阅卷速度很快，若阅卷人一时无法理解或无法找到而造成误判，造成的损失是无法弥补的，令人后悔莫及。

统观全局，认为影响解答美观性的因素有：

（1）**字体**。竞赛试卷书写不是书法比赛，不能行书草书一起上，要用楷体认真书写，尽量做到笔画清楚，尤其是数字和符号清晰，不要有模棱两可的数字，不要连笔书写，这样才方便阅卷。

（2）**字号**。数学专业书籍，如《中等数学》，一般都以五号字为宜，本文就是以五号字排印的。我们书写竞赛试卷时，尽量模仿，避免过大导致卷面不够用，或过小导致看不清。

（3）**分栏**。数学试卷的页一般较宽，若通体一栏，既浪费空间，又会导致各行因表达式长度不同而“错落有致”，不美观。可以假想在页的竖直中部有一条线，先写左栏再写右栏，该换行时及时换行，一个等号占一行，这样显得规范。不到万不得已，不要使用箭头来回拐弯。

（4）**分式**。对于较大的分式，若与普通字行距相同，必然导致分子分母的字母、数字过小，难以看清。当遇到复杂的公式推导时，最好增加行距，保证分式的字与一般字体一样大。

（5）**标记**。尽量注明重要推导步骤和中间结论的号码，用（1）（2）（3）……表示，一是方便在中间步骤给分，二是以后引用时注明号码来源，如“由（1）+（2）得……”，逻辑清晰，阅卷者能迅速找到解题根据，避免误判。

（6）**关联词**。在解答过程中应用“只需证”“下面对……进行分类讨论”“下面用数学归纳法证明”“由上式可得”“故”“不妨设”“综上”等关联词语，利于阅卷者迅速把握解题思路。

（7）**缩进**。在分类讨论时，可用数字标号（1）（2）等，以提示阅卷者；标号后紧跟条件“当……时”；类别内的各行讨论，最好从数字标号右侧开始，竖直方向各标号对齐，以体现层次性和逻辑性。分类讨论结束时，最好有总结性的结论，并采用“中间结论标记法”，以便以后引用。

（8）**注明定理**。有时阅卷人一时不知式子来源，容易误判。在运用重要定理时，注明在式子的前后，“由柯西不等式得”“由梅涅劳斯定理得”，逻辑清楚。

（9）**引理**。在解决十分复杂的问题时，若能将中间的重要结论写成“引理”，完整的表示出来，再对引理进行证明，会起到强调作用，增强解答的层次性。

（10）**修改**。当部分出现错误时，轻轻用线划掉再重写即可，不影响整体效果。不要在式子中间进行修改，否则不清楚。在正式书写之前最好在脑中把思路理顺，按照正常逻辑顺序书写，尽量避免大规模涂改。

（11）**推导**。在较长的式子推导中，最好只保留重要的、有技巧的变形步骤，其他等价推导可在草稿纸上完成，以节省卷面空间。

（12）**结论**。题目解完后，要有总结性的结论，正面回答题目中的问题。

如此种种，不再赘述。表达规范需要长期积累，水滴石穿，最终受益匪浅。总之，表达规范，好的书写习惯能令人赏心悦目，同时迅速把握解题思路，是竞赛得分的重要基础。

第二章 观察变形——抢分的前期准备

很多同学在解题时，不善于进行变形，而直接代入某种特定的方法开始计算。这种思路应对高考的套路题也许是可行的，但对于竞赛中难度大、技巧性高的试题，盲目计算只会走入死胡同。拿到题目，首先做的应该是观察问题特征，观察出题目内含的等量、不等关系，并采取适当的变形，化归到已经解决的某类问题，为本文后面的“特殊值法”和“试探法”奠定基础。

例 1 （经典问题，2008 年安徽初赛）求 $\frac{1}{2008}$ 的小数形式的循环节长度。

解 $2008=2^3\times251$. 251 的欧拉函数 $\varphi(251)=250$. 而 $250=2\times5^3$. 对 **250** 的约数从小到大试验，知 $10^{50}\equiv1$（mod 251）。故 1/2008 的循环节长度为 50.

分析：解答似乎“不知所云”，因为这涉及到数论知识。首先，$10^{\varphi(m)}\equiv1$ (mod m), 是欧拉函数的性质，在此略去证明。对正整数 n，欧拉函数是不大于 n 的数中与 n 互质的数的数目。而 1/2008 的循环节长度等于 1/251 的循环节长度，因为循环小数乘除 2 或 5 的任意幂次，循环节长度不变，乘除的 2、5 在 mod 10 时不会体现。$10^t\equiv1$（mod n）与循环小数的关系，就是 10^t 被 n 除余数为 1，这样在除法式中，除到第 t 位时余数与开始时相同，这意味着新的循环开始了，即 t 是循环节长度。而 251 是质数，其欧拉函数为 251-1=250. 由于 250 必为循环节长度的整数倍，故一个循环节的长度为 250 的约数，对约数从小到大逐一试验即可。

在本题中，联想 $10^{\varphi(m)}\equiv1$ 与循环小数的余数，属于“构造”的经典。实际上，循环小数的循环节长度问题还与著名的“大整数分解问题”有关。关于循环节长度的讨论，目前仅能就约数一一试验，而没有更好的办法，由于 1/p（p 为素数）的循环节长度难以找到规律。如果能够解决循环节长度问题，得出大数的约数，解决大数分解问题，RSA 加密体制的安全性将受到极大挑战，并引起数论界的一次革命。

例 2 （经典问题）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$.

答案：极限为 $\frac{\pi^2}{6}$.

分析：曾有一道数学竞赛题，就是证明该式小于 **2.** 利用了整数的分拆和放缩。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots$$

$$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

这是一个不错的构造的例子。但我们想知道，这个“放过头”的结论显然不是上式的确界。那么如何求极限？

这个问题莱布尼茨和伯努力都曾经研究过，但是没有结果，而欧拉运用他娴熟的数学技巧给出了如下的算法。他实际上采用了泰勒展开的方法（请参阅微积分教程）。

已知 **sinZ=Z -Z^3/3! +Z^5/5! -Z^7/7!+** …… （在此，**n!**表示 **n** 的阶乘）

而 **sinZ=0** 的根为 **0**，±π，±**2**π，……（π表示圆周率）

所以 **sinZ/Z=1- Z^2/3! +Z^4/5! -Z^6/7!+**……的根为±π,±**2**π,……

令 **w=Z^2,**则 **1-w/3**！ **+w^2/5! -w^3/7! +**……**=0** 的根为π**^2**，(**2**π**)^2**，……

又由一元方程根与系数的关系知，根的倒数和等于一次项系数的相反数，得

1/π**^2+1/**（**2**π**)^2 +1/(3**π**)^2 +** ……**=1/3!**

化简，得 **1+1/2^2+1/3^2+**……＝π**^2/6**

欧拉将毫无关系的三角函数与级数放在一起，解决了多年没有结果的问题，他的数学运用能力可见一斑，我们不妨从他的实例中学习解题的方法技巧，有时大胆猜想也是一种不错的办法。

在“抢分”之前，先观察式子具有的特征，不要急于对整体运用不等式或放缩，而要先对每个小单元进行恒等变形或放缩，使各个单元之间建立起关系，或有相等、大小关系，或恰能互相消去，或恰好符合著名不等式的结构，达到“先局部后整体，以局部促整体”的目的，也许会柳暗花明。

例 3 设 **x,y,z≥0, x+y+z=3.** 证明：$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx$.

证明：要证结论，即证

$$(x+y+z)^2 \leq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$
$$+x^2+y^2+z^2.$$ 即

$$3(x+y+z) \leq x^2+2\sqrt{x}+y^2+2\sqrt{y}+z^2+2\sqrt{z}.$$

$$x^2+2\sqrt{x}=\sqrt{x}(x^{3/2}+2)=\sqrt{x}(x^{3/2}+1+1)$$
$$\geq 3\sqrt{x}\sqrt{x}=3x.$$

分析：在这道题中，对 $x^2+2\sqrt{x}$ 的局部进行变形、放缩，在解题中十分重要。同时，此题还用到了“从结论出发”的分析法证明，较为巧妙。

例 4 求 2^{1999} 的末四位数。

解：φ（625）= φ（5^4）=5^4（1-1/5) =500. ∵ (2, 625)=1 ∴ $2^{500} \equiv 1 \pmod{625}$. ∴ $2^{2000} \equiv 1 \pmod{625}$. 令 2^{2000}= 625m+1. (m∈ N) 又 $2^5 \mid 2^{2000}$, 令 2^{2000}= n×2^5 (n∈ N). ∴ 625m+1=2^5×n. 故有 m=32k+15, n=625k+293 (k∈ Z). 将 n=625k+293 代入 2^{2000}= n × 2^5，有 2^{2000}=32(625k+293)=20000k+9376. ∴ 2^{1999}=10000k+4688. 末四位为 4688.

分析：此题用到了欧拉函数和 mod 625、 mod 32，充分利用指数 2000 的特点。尤其是变形为 2^{2000} 以便处理，体现了“化零为整”“化复杂为规则”变形的技巧精髓。

例 5 使用计算器，估计 2008^{2008}，用科学记数法表示，保留两位有效数字。

解：2008 lg2008= 6631.9495... 由于 6631<2008lg2008<6632，故 2008^{2008} 有 6632 位；又因为 $10^{0.9495}$= 8.90...，故 2008^{2008} 的首两位数为 89. 故 2008^{2008}= 8.9×10^{6631}.

分析：由于 2008^{2008} 太大，不可能用计算器直接计算，又因为原题只要两位有效数字，故思考 **10** 进位制的特征，发现一个数 **x** 的位数即为**[logx]+1**，注意到指数的存在，应用对数公式，即：**log(2008^{2008})=2008lg2008.**

而 **lga=log(2008^{2008})-6631=log($2008^{2008}/10^{6631}$)** 即为幂前系数，**a=$10^{2008lg2008-6631}$=8.90...** . 故用计算器可算出保留两位有效数字的 **2008^{2008}.** 在本题中，巧妙的避开了高幂次的计算，而利用 **lg** 函数将指数降为乘法，便于计算。在 **k** 进制的问题中，此法仍然适

用，只需变为 $\log_k x$。这便是变形的核心思想——降维（减少问题的复杂性）、降次（降低幂次，指数变乘，乘变加，高次变低次，二次变一次）、消元（减少未知数个数）。为了降维、降次、消元，需要充分挖掘问题的隐含条件。

例 6 （解析几何）设正四面体的一个过顶点的平面与三个过该顶点的侧面相截，三条截线与四面体底面的线面角分别为 α, β, γ. 求证：$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 3/4$.

分析：构造合适的角是关键。在本题中，选择作垂线与交点的连线，是因为其他角度之间不易建立等量关系，如垂足交点与交点定点联线夹角、面的斜线与底面夹角等，虽然容易想到，但后面难以解决。由此可见，选择自变量是解决问题的关键。选择的自变量是否合理，要看它是否容易利用题目条件，建立等量关系，便于问题求解，而不是把最简单的变量直接作为自变量。选择自变量，在不等式中也叫选择主元，是开始正式求解的重要准备工作。

变形、构造的技巧是真功夫，只有多加练习才能形成“条件反射”。这里的几个例子，只是让大家体验一下，变形的技巧其实还有很多，需要慢慢积累。

第三章　特殊值法——抢分的核心技巧

在数学研究中，“从特殊到一般”是重要的思想方法。数学竞赛题，由于其难度，多少有些研究的性质。于是对许多竞赛题目，“特殊值法”显得至关重要。

3.1 什么是“特殊值法”

特殊值法，又称“和谐法”，就是对题目中所给的表达式，代入特殊值，寻找其规律。特殊值，就是易于计算、求解的值。对代数问题，往往是中值（平均值）、边值（最大最小）。当自变量取特殊值时，函数值往往位于极值点（区间上的最大、最小值）。对其它问题，就是规模较小，简单的，或具有特殊性质的代入值。

3.2 特殊值法的理论依据

若函数 f(x)为凸函数，由琴生不等式（导数法证明），有 $f(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)\leqslant a_1 f(x_1)+a_2 f(x_2)+...+a_n f(x_n)$. 即：对 n 个不同变量，他们和的函数与函数的和具有不等关系。同样，对其他运算，也有类似的不等式存在。

特殊值法的证明，通用方法是导数法。以 3 个变量的函数 f(x,y,z)为例，设 x+y+z=k 为常数，$x\geqslant y\geqslant z$.其中 $x\geqslant k/3$, $z\leqslant k/3$.先固定 x，调整 y,z, 即函数 f(y,z).又 y+z=k-x 为常数，则有 z=k-x-y,三元函数变为一元函数 f(z). 求 f(z)含 z 单项的导数 f’(z),可得当 z=(k-x)/2 时，f’(z)=0; z<(k-x)/2 时，f’(z)<0; z>(k-x)/2 时，f’(z)>0. 即应用单调性可得，对 0<z<k/3, y=z 时 f(z)最大。此时 y=z=(k-x)/2. 这次调整使 y,z 相等。同理，固定 z, 可得 x=y. 由此，x=y=z. 这是一种逐步调整的策略。对于多元函数的情形，可类似的证明。（详细推导步骤见单墫《利用导数证明不等式》，《中等数学》2006 年第 2 期）

由此，我们知道特殊值法的适用范围：当不等式的“一项”为单峰函数（中间值最大或最小）时，可使用特殊值法，此时最值取在均值处，而边值处为另一个最值。有趣的是，竞赛中出现的多数“和谐”的表达式都具有这种特点，故名“和谐法”，这说明了特殊值法的通用性。

类似的，我们可用“逐步调整法”解决不等式问题。具体讨论参考本文后面内容。

3.3 特殊值法在函数不等式中的应用

在应用特殊值法时，要注意观察题目中条件的内在规律。对于对称式、轮换式，往往取中值时达到一个极值，取边值时达到另一个极值。对于单调的函数，极值在定义域两端取到。

应用特殊值法证明不等式时，关键是证明函数的一项为单峰函数，一般应用导数法。当表达式较为复杂时，可分层求导，令重复出现的复杂部分为自变量，成为复合函数，证明内外层函数单调性相同即可。另外，可应用单调性的“运算法则”简化计算。即：单调性相同

的函数相加、相乘、复合，单调性相反的函数相减、相除，单调性不变。若为选择填空题，此时答案已经得出；若为解答题，再应用本文 4.2 节的逐步调整法即可证明全题。

例 1 已知 a,b,c 为非负实数，且 a+b+c=1.求证：$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geqslant 2$.

分析：由“特殊值法”，易知此函数的“一项”$(1-a^2)^2$ 为单峰函数，符合应用特殊值法的条件。故 a=b=c=1/3 时，不等式取最值 2. 可以尝试放缩法、著名不等式，将较为繁琐。

注：一道类似的第 49 届 IMO 试题：设实数 x,y,z 都不等于 1，满足 xyz=1, 求证：$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$. 解法同上，略。可见特殊值法的通用性。

例 2 （第 31 届 IMO 预选题）设 a, b, c 为正实数，且 abc=1. 求证：$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq 2$.

分析：这是一道著名问题，用构造函数利用单调性法、排序不等式相加法等均可证明，并有推广的一般结论。（见《奥赛经典· 高二数学》）但应用特殊值法，此题非常简单。由于 $a^3(b+c)$代换后求导，满足使用条件，故 a=b=c=1 时，原式最小值为 2。

通过以上两道例题，我们认识到：特殊值法在函数不等式中，其实是导数法、逐步调整法，体现了“化整为零，分步解决”的数学思想。特殊值法是证明和谐对称不等式的一件利器。

3.4 特殊值法在几何问题中的应用

在解析几何、立体几何中，常常需要求解一般性结论。当一般性结论不易观察时，可以将几组特殊值（线段相等、角相等）代入，求出待求结论。因为问题的结论是唯一确定的，故结论已经求出，下面便是证明过程。可以考虑代入的值中，哪些中间结论是巧合的，哪些中间结论是必然的。一般来说，对不同的特殊值结论均相同的即为普遍结论。然后针对“必然”的结论进行证明，就把题目分解成若干个简单的证明题，大大降低了解题难度。

代入特殊值后，在求解时，可以应用“程序法”顺序求解。就像大火蔓延一样，从初始条件的几个“起火点”出发，利用定理，找出所有与之相关的“可燃物”（中间关系），一步步“蔓延”（将结论作为已知，重复以上过程），直到目标（所求结论）。这样虽然复杂，但不重不漏，不易丢失条件。得知结论后，当证明时，可以用“双向搜索”，从条件和结论同时出发，加快寻找速度。

例 3 （河北省 2008 年初赛）在三棱锥 S-ABC 中，SA=4, SB≥7, SC≥9, AB=5, BC≤6, AC≤8. 则三棱锥体积的最大值为________________.

答案：$8\sqrt{6}$.（以下为标准解法）

解：设∠SAB=α，根据余弦定理有 $\cos\alpha=\frac{SA^2+AB^2+SB^2}{2\times 4\times 5}\leq -\frac{1}{5}$.，

故 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\leq\frac{2\sqrt{6}}{5}$ $S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}SA\cdot AB\sin\alpha\leq 4\sqrt{6}$. 由于棱锥的高不超过它

的侧棱长，所以 $V_{C\text{-}SAB}\le\frac{1}{3}S_{\triangle SAB}\times BC\le 8\sqrt{6}$. 事实上，取 SB=7 ，BC=6 且 CB⊥ 平面 SAB 时，可以验证满足已知条件，此时 $V_{S\text{-}ABC}=8\sqrt{6}$，棱锥的体积可以达到最大.

分析：此题标准答案中“取 SB=7 ，BC=6 且 CB⊥ 平面 SAB 时”即为特殊值法的应用。实际上，“CB⊥ 平面 SAB”是命题人的假设，而恰好在此时取得最值。这就是“构造法”。经常有同学问，构造的太巧妙了，我怎么想不到。实际上，巧妙的构造都是从简单情况、特殊情况入手分析，发现满足某种条件时恰好满足题意，于是产生了巧妙的构造。此题若用其他解法，必定较为复杂。

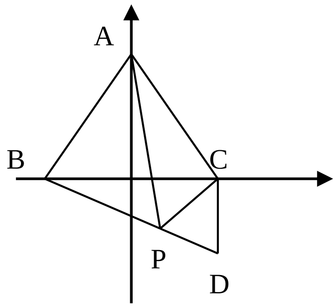
例 4 （河北省 2008 年初赛）已知坐标平面上三点 A(0,3)，B($-\sqrt{3}$,0)，C($\sqrt{3}$,0)，P 是坐标平面上的点，且 PA=PB+PC，则 P 点的轨迹方程为______________.

答案：$x^2+(y-1)^2=4\ (y\leqslant 0)$.

（标准解法）解：如图，作正三角形 PCD，由于ΔABC 也是正三角形，所以可证得 ΔACP≌ΔBCD，所以 BD=AP.

又因为 BD=PB+PC=PB+PD，所以点 B,P,D 共线.

∠CBP=∠PAC，所以 P 点在ΔABC 的外接圆上，又因为 PA>PB, PA>PC，所以所求的轨迹方程为 $x^2+(y-1)^2=4\ (y\leqslant 0)$.



分析：笔者思考这道题时，首先注意到△ABC 是正三角形，然后枚举几个 P 点的可能位置，例如△ABC 的三个旁心，以及 B、C 两个三角形顶点。由于两边之和等于第三边的图形往往是圆锥曲线，又发现以上五点位于特殊位置，恰好共圆，且圆心位于△ABC 的中心。这样，P 点的轨迹方程就被轻松确定了。

注意到以上两题都是选自河北省 2008 年初赛填空题，而且都是竞赛时得分率较低的题目。特殊值法的广泛应用，在此可见一斑。在解析几何、立体几何题目中，若能应用特殊值法，可以轻松构造一些“意想不到”的方法。对于解答要求不甚严格的选择题、填空题，可以直接出解，节省时间；对于解答题，则可先知结果，找到重要关系，产生猜想思路，迈出重要一步。

3.5 特殊值法在组合问题中的应用

在组合问题中，我们常常需要寻找“极端位置”，从极端情况入手推出矛盾，或者证明命题。从这个角度说，“特殊值法”类似于“极端值原理”。

极端值原理的方便之处在于，假设了最大值后，就可以利用其最大性推导，其他元素与它相比都有大小关系，在组合问题中大小关系很重要。并对边界提出很高的要求。由于矛盾一般发生在边界位置，极端值法十分有效。必要时，甚至可以将所有元素排序，这样更有力。

例 1 试问能否在平面上放置 2 008 条线段,使得每一条线段的端点都严格地位于其他

线段的内部?

证明 假设可以放置2 008 条线段,使得它们的4 016 个端点全部严格地位于其他线段的内部. 现取一定点 O ,并找出 4 016 个端点中离点 O 最远的点 A ,于是,平面上再没有比点 A 到点 O 的距离更远的点(上述线段的端点) 了. 由于点 A 严格位于另一线段 BC 内部,从而,点 A 是△OBC 的边 BC 上的点. 故 $OA < \max\{OB, OC\}$. 这与点 A 是离点 O 最远的点矛盾. 可见平面上不能放置满足题目要求的 2 008 条线段.

分析 本题抓住极端位置———最远点 A ,层层展开,导出矛盾.

例 2 将正整数1 至100 随意填入10 ×10 的方格表中,且每个方格填一个数. 证明:必有某两个相邻方格(即具有公共边的方格) 中所填数字之差不小于 6.

证明 假设可以找到一种填法使得每两个相邻方格中所填数字之差都不超过 5 (即小于 6) . 观察与1 在同一行、与100 在同一列的方格内的数字 a ,由于 a 与 1 之间至多间隔 8 个方格,故 $a \leqslant 1 + 9 \times 5 = 46$. ①

又由于a 与100 之间也至多间隔8 个方格,故 $a \geqslant 100 - 9 \times 5 = 55$. 与式①矛盾,从而原命题成立.

分析 本题在从特殊位置特殊对象入手的同时,又注意从全面加以考虑,从而使问题顺利获证.

综上所述,“特殊值法”作为“抢分”的核心技巧,在函数不等式、解析几何、立体几何、组合等问题上,具有重要作用。掌握此法,受益匪浅。

第四章 试探法——抢分的一般策略

4.1 什么是“试探法”

试探法，归根结底还是“特殊值法”。之所以从“特殊值法”中独立出来另成一节，是因为很多问题开始毫无头绪，需要从简单入手，逐步试验，观察特点、变化趋势，才能得到最后的结论，进而应用其他方法严格证明。

4.2 留心试探中的关系

很多同学感到头疼的问题是“不知如何下手”。造成这一问题的因素可能是被问题的复杂性“吓怕”了，生怕做不出来，形成了心理障碍。首先要克服这个心理障碍，相信自己，敢于动手去做。要善于应用草稿纸，将各个试探结果记录下来，以便下面的比较。

下一步就是“如何试探”。当然，我们要从小处开始，即最简单、最基本的情形。试探的时候，要时时留意试探变量、中间结果、最终结果的横向（同一次试探）关系、纵向（各次试探同一个变量）关系，有时规律就隐藏在某个中间结果中。不能急功近利，要试探 4-5 个小数据，才能保证得到的结论是正确的。

4.3 试探法在数列问题中的应用

在数列问题中，求复杂数列通项公式时，常常用到试探法。先对 $a_1,a_2,a_3...$按照递推式进行计算，再寻找规律，最后用数学归纳法证明。

寻找数列各项间关系时，最简单的当然是等差数列、等比数列，这时问题的突破口已经打开。有时数列比较复杂，可尝试某项与前两项的和、差、积、商间的关系。若还不可行，可将相邻两项的和、差、积、商构造成新数列（这叫做数列的差分），重复以上过程，以便发现二阶甚至高阶等差、等比数列。要特别留意，数列的某项是否与前 n 项和有关，这是类似等比数列的标志。

例 5 某校数学课外小组在坐标纸上，为学校的一块空地设计的植树方案如下：第 k 棵树种植在 $P_k(x_k,y_k)$处，其中 $x_1=1,y_1=1$. 当 $k\geq 2$ 时，$x_k=x_{k-1}+1-5[(T((k-1)/5)- T((k-2)/5)]$. $y_k=y_{k-1}+T((k-1)/5)- T((k-2)/5)$. T(a)表示非负整数的整数部分，例如 T(2.6)=2, T(0.6)=0. 按此方案，第 2008 棵树种植点坐标应为______。

分析：对于“高斯函数”熟悉的同学可能一眼就看出其中的规律。但笔者解决此题时，就是应用了“试探法”。根据题中所给的递推公式和初始条件，求得 $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $x_6=1$...出现了以 5 为周期的循环。而 $y_2=1$...$y_5=1$, $y_6=2$...$y_{10}=2$, $y_{11}=3$...每 5 个增加 1。当发现规律后，其实原因很简单，就是 T((k-1)/5)和 T((k-2)/5)在被 5 除余 1 时恰好相相差 1，其余时相等。于是答案轻松解决：坐标为（3，402）。

例 6 （1991 年全国高中联赛）设 a_n为下述自然数 N 的个数：N 的十进制表示中的各位数字之和为 n，且每位数字只能是 1，3，4. 求证：a_{2n}是完全平方数。

分析：应用“试探法”，先对最小的数据进行试验。$a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=4$. 当 $n\geq 4$ 时，

$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}$. 这是一个递推式，即和为 N 的 n 位数由 n-1 位数添上一位 1，2，4 产生。如果这个结论也得不到，可以多试几组，把这个结论“猜”出来。然后即可运用递推公式，算出后面的几项。由于题目要求证明的是偶项为平方数，故数列一定与奇偶有关。分奇偶观察数列，可发现一些有趣的性质。尤其是 $a_{2n}=n^2$, 表明结论正确，下面寻找的就是 a_{2n} 与 n 的关系。注意到 $a_n+a_{n-2}=n$（如何找到的？通过试探），故命题化为证明 $a_{2n}=(a_n+a_{n-2})^2$, 找到了目标，大大降低了难度。由于数列中关系很多，还有其他途径可以证明，不再赘述。

例 7 已知 $a_1=1$，求数列 $a_n=\frac{1}{16}(1+4a_{n-1}+\sqrt{24a_{n-1}+1})$ 的通项公式。

分析：本题解法与例 5 类似，很容易发现规律，再用数学归纳法证明即可。

例 8 已知 $f(x)=(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2\quad(x\geq 0)$, 又数列$\{a_n\}$中 $a_1=2$，该数列的前 n 项和 S_n（$n\in N$）对所有大于 1 的自然数 n 都有 $S_n=f(S_{n-1})$.求$\{a_n\}$的通项公式。

分析：揭开函数 f(x)的神秘面纱，不过是一个较为特殊的递推数列，后一项与前 n 项和有关。仍然采用试探法，注意到 $a_n=S_n-S_{n-1}$, 此题即可顺利解决。

当我们对一个数列的性质、通项公式“一无所知”时，不妨按照题意代入几个试验一下，留意各项间的关系，必要时可以尝试作新数列，观察新数列的性质，也许有意想不到的收获。当然，也可以应用“不动点法”等方法，对于模式化的数列，不动点法、公式法也许更加简单直接。

4.4 试探法在函数方程中的应用

函数方程，正如其名，十分“抽象”，不易摸透。如果直接接解函数方程，没有固定的解法，还容易无从下手。本文只能讨论函数方程的可能表达式，而不能证明其唯一性，因为证明仍然是一项高难度的技巧性工作。

试探法解函数方程，一般有试验顺序。首先检查基本初等函数是否是问题的解。多数函数方程问题的解都是基本初等函数，这一步试探可以立即得知结论。

然后代入几个特殊值，运用“特殊值法”，得出特殊关系式，便于猜想。常用的特殊值包括：常数 0，1，-1；自变量 x；能够使函数中某部分为零而消去的取值；能够使函数中两部分相等的取值。一般来说，代入这些值后，即可暴露出函数方程的几个特例，即本质特点。对这几个“简化版”函数方程进行加减乘除运算，即可消去某些不必要的项，得出基本函数方程，从而根据知识储备得出函数方程的解。在得出解后，为了避免遗漏，最好检查常数项（包括为零的隐含常数项），是否常数可能有其他取值。对于指数型函数方程，还应当检查指数项。而函数的各项系数，一般是唯一的。

例 9 设 f(x)为 R 上的单调函数，解函数方程 f(f(x))=x.

分析：显然 f(x)=x 满足题意。（这就是试探法）

假设对某个 x，f(x)>x.（这里用了反证法，开始证明唯一性）

则由单调性知 f(f(x))>f(x)>x,与条件矛盾。（从这里发现，解函数方程问题常常需要应用单调性。所以在解题前应先探讨函数的单调性、奇偶性。）

若 f(x)<x,同理引出矛盾。故对任意 $x\in R$, 都有 f(x)=x.

例 10 求所有的函数 $f(x):Q\to Q$,满足条件 $f[x+f(y)]=f(x)\cdot f(y)$.

分析：显然 $f\equiv 0$ 满足条件。设 $f(y)\neq 0$, 由 $f(y)=f[y-f(y)]\cdot f(y)$,得 $f[y-f(y)]=1$.即存在 a, 使得 f(a)=1. 令 y=x（特殊值法），f(x+1)=f(x). 故 f(x)是周期函数，且 1 为其周期。故 f(x+n)=f(x).

又 $f[n\cdot f(y)]=f[(n-1)f(y)+f(y)]=f[(n-1)f(y)]\cdot f(y)=\cdots=f(0)\cdot f^n(y)$. 设 $f(g)=q/p$, $p,q\in Z$, 则 $f(0)=f(q)=f(0)\cdot f^p(y)$. 由于 $f(0)\neq 0$, 则 $f^p(y)=1$, $f(y)=1$ 或-1. 若 $f(y)=-1$, 则 $f(x-1)=f(x)f(y)=-f(x)$, 仍导出 $f(x)=0$. 于是对一切 $x\in Q$, $f(y)=1$. 故所求 $f(x)$为 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)\equiv 1$.

注：对有理数类问题，可设为分数形式，并采用由整数到分数的推广方法（柯西方法）。

4.5 试探法在组合问题中的应用

试探法应用于组合问题，一般是“从小处着眼”，先对较小的、容易计算的情况进行试探，再解决一般性问题。

例 11 求数列通项公式：$S_n=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$.

分析：令 $S(n,m)=1^m+2^m+\cdots+n^m$, 便于说明问题。我们先试探 $S(n,0)$, ...$S(n,3)$, 然后得出要求的 $S(n,4)$. 显然，$S(n,0)=n$. $S(n,1)=(1+n)*n/2$. $S(n,2)=(n+1)(2n+1)/6$.这都是我们常见的公式。注意到 $S(n,m)$是 $m+1$ 次多项式，于是我们猜想 $S(n,4)$是 5 次多项式。设 $S(n,4)=an^5+bn^4+cn^3+dn^2+en+f$. 将 $S(1,4)$, $S(2,4)$...$S(6,4)$手动算出，代入上式，可解出 $S(n,4)$的各项系数。（应用待定系数法）经分解因式，结论为：$S_n=\dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$. 此题严格的解法需要用到数列差分的知识，这里只是提供一种通用的“抢分”方法。

例 12 （2000 年全国高中联赛）有 n 个人，已知他们任意 2 人至多通电话 1 次，他们任意 n-2 个人通电话的总次数相等，都等于 3^k（k 为正整数）。求 n 的所有可能的值。

分析：通过对 4,5,6 个人的情况小规模试验知，不考虑 3^k 问题，只是“任意 n-2 个人通电话的总次数相等”就可以确定所有人之间全部通过电话。由于反例长时间找不到，我们便设想有下面的加强结论：

在 n 个点组成的图 K_n 中，若对某个 $2\le k\le n-2$，任意 k 个点间的边数相同，则 K_n 是完全图。

这个命题已被证明，要用到组合数、图论中正则图的知识，这里不详细展开，留给读者思考。（提示：先证正则图，后证完全图。）

本题的标准答案中用了其他方法，充分利用了 3^k 条件。但以上推广，更能体现问题的本质。而这个有趣的结论，就是通过“试探法”发现的。

上述例题还不能全面反映试探法在组合问题中的应用。很多较难的问题，都是从小规模数据枚举、试算而找到规律的。例如 2007 年全国高中联赛的“五子棋”问题，就可以应用先用较小的棋盘试验，猜想“马步跳”，后证明的方法简单地解决。（丁龙云《从“五子棋”到“马步跳”》，《中等数学》2008 年第 2 期）而当年很多同学就是不愿动笔试验，而盲目地采用代数方法试图直接解出结论，导致该题得分率偏低。同样，著名的“红点问题”的解决，也是从小数据试验得出规律的。（李成章《“红点问题”和解法的新进展》，《中等数学》2006 年第 7 期）由此可见，试探法是组合问题的基本方法。

4.6 试探法在数论问题中的应用

试探法在数论问题中，与组合问题一样，都是遵循“由小见大”“由特殊到一般”的原

则。王连笑《通过试验证明数论中的存在性问题》(《中等数学》1999 年第 2 期)就是这种方法的具体阐述。

例 13 数列$\{x_n\},\{y_n\}$定义如下：$x_0=1,x_1=1, x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$. $y_0=1, y_1=7, y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}$. 求两数列的公共项。

分析：显然 1 为两数列的公共项。公共项有两种可能：后面没有公共项，或公共项周期性出现。我们采用取模的办法，对 x_n,y_n 取 mod 8: $x_n=1,1,3,5,11,21...$ $x_n\equiv 1,1,3,5,3,5...(\bmod 8)$. $y_n=1,7,17,55,161...$ $y_n\equiv 1,7,1,7,1...(\bmod 8)$. 显然分奇偶讨论可知，$x_n\neq y_n (\bmod 8)$. 故 1 为两数列唯一的公共项。

此题中开始没有思路，列出几项，尝试几个模后，发现 mod 8 有规律，且能说明问题。在列出几项发现规律后，要用数学归纳法证明。

例 14 试求不能表为$|2^a-3^b|$ (a,b 为非负整数)的最小素数。

分析：这个问题很难直接解决，只能先试探。经验算，2，3…37 均可表示成$|2^a-3^b|$形式，此时 a,b<10,列出 2、3 的次方数后很容易观察出差为素数的两项。而 41 长久不能试出，于是猜测 41 为所求素数。(这是试探法在数论中应用的一般方法)下面用反证法证明。

假设 $2^x-3^y=41$(1)或 $3^y-2^x=1$(2). 对于(1), mod 8: $2^x\equiv 0$, $3^y\equiv 1$ 或 3, $41\equiv 1$, 故 $2^x-3^y\neq 1$,矛盾。对于(2), 考虑 mod 4: $3^x\equiv 3$ 或 1, $2^y\equiv 0$, $41\equiv 1$, 故 $3^x\equiv 1$, x 为偶数. 再考虑 mod 3: $3^x\equiv 0$, $2^y\equiv 2$ 或 1, $41\equiv 2$, 故 $2^y\equiv 1$, y 为偶数.(采用取多个模的办法，对不同的形式得出不同的结论，最终化为奇偶性问题，引出矛盾) 设 $x=2x_1$, $y=2y_1$, 有 $3^{2x_1}-2^{2y_1}=41$ 即$(3^{x_1}+2^{y_1})(3^{x_1}-2^{y_1})=41$. 由于 41 是质数，$3^{x_1}+2^{y_1}=41$, $3^{x_1}-2^{y_1}=1$. 无整数解(试探法易知)矛盾。故 41 为所求质数。

在数论问题中，试探法往往用于试出取哪个模，对不同的模有不同的规律。我们应当选择合适的余数，以便分析。下面给出一些常见的取模特征。

①两个 4k+3 数之积为 4k+1 数。

②x^2 被 8 除的余数为 0，4(当 x 为偶数)，及 1(当 x 为奇数)

③x^2 被 4 除的余数为 0，1

④x^2 被 3 除的余数为 0，1

⑤x^3 被 9 除的余数为 0，1，8

⑥$x^2+y^2\neq 4k+3$

⑦$x^2+y^2\neq 8k+3, 8k+6, 8k+7$

⑧$x^3+y^3\neq 9k+3, 9k+4, 9k+5, 9k+6$.

4.7 试探法在平面几何中的应用

在平面几何中，试探法往往不能作为解题的最后手段。它是寻找几何直观，发现数量关系、边角关系，方便证明的重要方法。当拿到一道较为复杂的平面几何题时，可以先用作图工具，画出尽可能标准且较大的图形，观察有特殊关系的线段，是否四点共圆，是否线段相等，是否两直线垂直……

把向量作为工具解决平面几何问题，既避免了纯几何添置若干辅助线的麻烦，又避免了纯解析几何法计算量过大的缺点。向量法的特点是数形结合，用向量论证明快、简洁、容易入手。

三角法也是解决平面几何问题的重要工具，面对一些边角关系复杂又无章可循的问题，如果把其中重要的角度设出，利用正弦定理、余弦定理、张角定理等沟通边角关系，将各种问题转化为证明三角恒等式或三角不等式，再使用和差化积、积化和差公式，结合三角形中的若干重要不等式，可顺利解决几何难题。具体实现方法，有常用的切割化弦法、正余切法

（陶平生《三角形结构中的一个解题系统》，《中等数学》2007 年第 4、5 期）等。

下面是曹钦翔《从一个平面几何问题所想到的》的摘录，希望对读者有所启发。

在初中学习平行四边形的时候，我们了解了一系列平行四边形的几何性质，如：对边相等、对角相等、对角线互相平分等等。当然了，矩形、菱形等特殊平行四边形的几何性质就更丰富了。于是我就想到一个问题，一个三组对边分别平行的凸六边形（下简称平行凸六边形）具有怎样的性质呢？对边相等？对角相等？对角线互相平分？经过简单的尝试与证明，我发现上述三个命题只有“对角相等”是正确的。

但同时，我在作图中发现了一个惊人的巧合，我猜想：平行凸六边形六条非主对角线所限定的六边形三条主对角线交于一点。所以我努力证明以下命题：凸六边形 ABCDEF 中，若 AB//DE，BC//EF，CD//FA，AC 与 BD 交于 P1,BD 与 CE 交于 P2，CE 与 DF 交于 P3，DF 与 EA 交于 P4，EA 与 FB 交于 P5，FB 与 AC 交于 P6，则 P1P4，P2P5，P3P6 交于一点。

首先，在我的研究过程中，我对这个命题的正确性进行了一个判断。这项工作我是分两步做的。第一：我通过作出不同位置关系的图，看是否大致交于一点（在误差允许的范围内）。第二，在第一步我得到肯定的结论后，我通过电脑编程，对随机产生的符合条件的图形，分别用解析几何计算 P1P4，P2P5，P3P6，两两交点的精确坐标，发现确实三线交于一点。在完成了上述准备工作后，几乎可以确信，该命题是正确的，于是我开始了：证明。

在这个证明中，不难看出，证明的思路是反复利用边元及角元的 Ceva 定理论证共线。方法十分初等易懂。在比例式的计算中，运用了一个非常精妙的变形：首先用正弦定理把线段比例式化为三角函数的比例式，再用公式 S=1/2 ab sinC 把线段的比例式与面积的比例式不断相互转化，最后相消得证。当然，不得不承认，这一方法虽然初等，但还是较为繁琐，有没有好的方法呢？

我在学习了一些平面几何中点共线、线共点的定理后，发现在论证了 Q（AD 与 BE 的交点)在 P1P4 上后,可以反复使用 PAPUS 定理来证明待证结论(设 Q1=A P3∩DP5,Q2= EP2∩DP6，Q3= P3P6∩P2P5)： 证明：因为 P1P4Q 共线。 由 PAPUS 定理知 P1QQ2 共线，所以 P1P4QQ2 共线 又由 PAPUS 定理 P4Q3Q2 共线，所以 P1P4QQ2Q3 共线 所以 Q3 在 P1 P4 上。证毕！ 显然，这样的证明使的问题后半部分的解决方法简化了很多，事实上，由 PAPUS 定理，在 P1P4Q 共线的条件下，还可以证明 P1P4QQ1Q2Q3 是六点共线的！

做到这里，我就想，是不是问题的前半部分也可以类似简洁的解决呢？指导老师周建新老师提醒我：“ABCDEF 应该是在同一个二次曲线上的”我观察后发现，如果证明了 ABCDEF 是在同一个二次曲线上的，那么由 Pascal 定理(在二次曲线中的结论)，即可直接证明 P1P4Q 时共线的。这样一转化，整个问题就只需证明：ABCDEF 在同一个二次曲线上！ 这显然应该是一个解析几何的问题，而由于我自身解析几何功底尚不够扎实，这一问题一直没有解决。直到去旁听国家集训队的时候，金睿章同学提出，因为三组对边分别平行，即都交于无穷远点，而三个无穷远点时共线的！那么，由 Pascal 定理逆定理就证明了 ABCDEF 在同一个二次曲线上。

这样，整个问题的解答，就有原来的十分冗长变得很精炼了！在解决问题后，我又思考，如果六边形 ABCDEF 是凹六边形，前面的结论还会成立吗？重新回顾前面的证明，不难发现，凸六边形这一性质并没有使用过，也就说，这一条件是可以去掉的。即，对于一切六边形 ABCDEF，若 AB//DE，BC//EF，CD//FA，AC 与 BD 交于 P1,BD 与 CE 交于 P2，CE 与 DF 交于 P3，DF 与 EA 交于 P4，EA 与 FB 交于 P5，FB 与 AC 交于 P6，则 P1P4，P2P5，P3P6 交于一点。之后，我又想，“三组对边分别平行”的条件是充要的吗？如果不是，那充要条件是什么？我们注意到，ABCDEF 在同一二次曲线上，与 P1P4Q 共线是等价的（因为 Pascal 定理及逆定理都成立）！而 P1P4Q 共线可推出 Q3P1P4 共线（前面已经证明了），下面证明：Q3P1P4 共线可推出 P1P4Q 共线。证明：因为 P1P4Q3 共线。由 PAPUS 定理 P4Q3Q2 共线，所以 P1 P4Q2Q3

共线 又由PAPUS定理知P1QQ2共线，所以P1 P4QQ2 Q3共线 所以Q在P1 P4上。证毕！ 这样，P1P4Q共线与Q3P1P4共线是等价的！所以我们知道：Q3P1P4共线（即P1P4，P2P5，P3P6交于一点）的等价命题是ABCDEF在同一二次曲线上！

Pascal定理：ABCDEF六点在同一二次曲线上，则AB∩DE，BC∩EF，CD∩FA共线。

这样，我们就给出了一个完整的解答。最终我们发现，一个较为高等的证明，可以使得一个问题的解决简洁很多。因此，从这一个问题的两种解答方法可以看出，要处理好几何问题，一方面要有一个很好的几何思想，另一方面要能够熟练掌握各个领域的著名定理。

读罢曹大牛论文，不知读者有何感想。论文中用试探法，首先得出了结论，然后再用各种方法试图证明。所有竞赛高手，都是善于思考、解决问题的。我们要做牛年大牛，就要认真考虑问题是否有更简单的解法，问题的本质是什么，问题是否能够做一些推广。只有善于“举一反三”，才能提高自身水平。

综上所述，当遇到毫无头绪、无从下手的问题时，千万不要轻言放弃，通过对简单数据的试探与观察，也许“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”。

第五章 高效抢分“秒杀”选择题

在本文的上半部分，通过几个方面的数学竞赛问题，简要介绍了“抢分”的两个重要方法——特殊值法、试探法。我们已经看到，这些方法在竞赛考试中有多么巨大的威力。实际上，上述方法只能说是“巧题妙解”，属于“正统方法”，不能说是“抢分”。但是，问题始终是困难的。我们必须承认，有许多问题，即使应用了各种常规方法、上述巧妙解法，仍然不能得到解决。这时，所谓的“巧题妙解”就派不上用场了。放弃？不！我们为了得分，就要尽可能地去“猜”——追求得分最大化。

2009 年，随着数学竞赛题型“全面改版”，选择题也成为了仅在预赛中出现的“无足轻重”的题目。但我们不能因此放弃选择题的训练，因为选择题的思路在其他题型中也有应用，并且不少选择题的背后隐藏着丰富的内涵。

选择题，四选一，有且仅有一个选项是正确的。这就为“抢分”提供了极好的条件。利用选择题特点的最好方法，就是“排除法”。

做英语题时，同学们一定对“排除法”印象深刻。数学竞赛也不例外。说来简单，就是将四个选项一一代入题干，选择符合题意的一个。排除法适合“求符合条件的……值”“下列命题中，哪一个是正确的”之类的题目，或代入选项，或代入特殊值。尤其注意，在“命题正确”类题目中，一定要使用“特殊值法”，考虑全面，注意边界、特殊情况，避免掉入命题人的“陷阱”。

我们发现，数学竞赛选择题中能应用排除法的并不多。对于询问个数类的问题，我们首先应该想办法解决。最好的办法是自己找实例，找实例时一定注意不重不漏。一旦找到的个数超过某个选项，该选项立即被排除。若找到的个数恰好达到某个选项的值又确信没有其他可能，或者其他选项远远超出此选项，即可下定结论。当没有任何办法解决时，一个命题规律可能派上用场：个数“次大”的选项往往是正确答案。据笔者统计，这个结论对 70%-80%的“个数问题”正确。

例 15 过点 A（11，2）做圆 $x^2+y^2+2x-4y-164=0$ 的弦，其中弦长为整数的共有（ ）条。 A.16 B.17 C.32 D.34

分析：配方得 $(x-1)^2+(y-2)^2=13^2$，故 10-26 均为其弦，由于弦长是连续变化的，故 10,11,...26 均可取到。又两侧是对称的，11,...25 出现两次，故共 32 条，选 C。如果此题不会做，可以使用“次大原则”：直接选 C。

对于选择题中的区间问题，不要直接求区间，应先在坐标轴上将这几个区间表示出来，注意区间之间的包含关系。从区间的边界值入手，将区间的边界代入原式检验，可迅速排除错误选项，从而得出结论。

例 16 集合 $M=\{(x,y)|x^3+8y^3+6xy\geq 1,x,y\in R\}$，$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq t^2,\ t\in R\}$，$M\cap D=\emptyset$，则有（ ）

A. $-1<t<1$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}<t<\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}<t<\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$

分析：观察到集合之间有明显的包含关系 B⊆C⊆D⊆A。注意到正负是对称的，首先代入 1/2，发现矛盾，排除 A、D 选项。接着代入 C 的边界值，发现是正确的，故选 C。在代入过程中也有技巧，即适时应用“特殊值法”，令 x=y 或 x,y 一个为 0，经过试验，只要找出一组例子即可。此题若直接求解，会浪费较多的时间。

对于选择题中的“最多”“最少”问题，可以用简单方法先找出一个上界，对上界以内的数进行讨论。只要构造一组可行的接近上界答案的解即可说明问题。选择题中的选项，若明显与其他项相差过多，则十有八九是迷惑项，应予排除。对“可能的数目是多少”类问题，只需上下界均考虑即可。

例 17 设集合 $T=\{x_1,x_2,...,x_{10}\}$的五元子集满足 T 中的任意两个元素最多在两个子集中出现。问这样的子集最多有多少个。（　　）

A.252　　B.18　　C.10　　D.8

分析：注意到 $C^5_{10}=252$，A 被立即排除。首先尝试构造，发现较为困难。考虑 10 个元素的任意两个元素共 $C^2_{10}=45$ 种，每个最多出现 2 次，故所有子集最多有 90 个数对。每个子集 5 个元素，10 对，故最多有 9 个子集。于是只能选 D。事实上，8 个子集是很难构造的，而 9 个子集根本不可能。若开始就使用构造法，此题将变得异常困难。这是“先估计（卡范围），后排除，有必要时再构造”方法的范例。

选择题中的几何问题，可以采用“直觉法”解决。当几何题求解较困难时，使用作图工具，画出一个标准的图形，通过度量角度、长度等参量，结合几何直观，直接选择。同样，立体几何题可用折纸、用笔搭建框架等方法帮助思考，使立体图形更直观，便于发现边角关系。立体几何中的相等、垂直、平行往往是较多的，若能观察出这些特点，求解十分容易。

例 18 设 P 为△ABC 所在平面内一点，并且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.则△ABP 的面积与△ABC 的面积之比为（　　）

A.1/5　　B.2/5　　C.3/5　　D.4/5

分析：通过画图，或结合题图，易得△ABP 占△ABC 不到一半，但接近一半，再度量 AB 上的高，可得比例约为 0.4.这说明 B 为正确选项。

选择题中，往往会出现枚举类问题。这时要细心，不重不漏，不要因为是选择题就不打草稿，要把找到的情况一一列出，才便于分类讨论。

例 19 （2008 年河北初赛）把 2008 表示成两个整数的平方差形式，则不同的表示方法有（　　）种.

A　4　　B 6　　C　8　　D 16

答案：C.

解： 设 $x^2-y^2=2008$，即$(x+y)(x-y)=2008$．2008 有 8 个正因数，分别为 1，2，4，8，251，502，1004，2008．而且 x+y 与 x-y 只能同为偶数，因此对应的方程组为 $x+y=-2,-4,-502,-1004,2,4,502,1004$； $x-y=-1004,-502,-4,-2,1004,502,4,2$. 故$(x,y)$共有 8 组不同的值：(503,501),(-503,-501), (-503,501), (503,-501), (253,249), (-253,249), (253,-249).

分析：此题看似简单，其实容易出错。若未考虑到负整数的可能性，就会错选。另外作为选择题，此题的 8 组值没有必要求解出来。如果时间充裕，求解这些值可以起到检查答案的作用。

对于选择题中的组合选项问题，应分析各选项组合间的逻辑关系，先判断与选项关系大的题支，然后判断其它问题，应用排除法。对于判断不清的题支应暂时搁置。若不能解决，可根据特殊值法或由直觉推测。

选择题，最能暴露命题者的意图。从选项的设置特点，有时能得出问题的基本思路。辨别命题思路需要真题实践，这里不多加讨论。

选择题无论如何，不能留下空白。即使没有任何方法，也要凭直觉“猜”一个选项。据笔者的经验，“猜”的选择题正确率一般为 40%-50%，而不是纯概率的 25%，因为大脑中已经排除了一些“看似不正确”的选项。

选择题是竞赛试卷中的基础题，不能浪费过多的时间，应用技巧，在保证正确率的前提下，争取“秒杀”，速战速决。

第六章 高效抢分提高填空题正确率

填空题，是一试中得分率较高的题目，也是改版后的数学联赛中唯一的非解答题型。在多数选手填空题几乎满分的情况下，我们必须做到填空题少丢分、不丢分，至少不能犯低级错误，无谓失分。所以我们要在填空题的解答上下大工夫，努力提高填空题正确率。

下面分类介绍解答填空题的若干策略。

对询问个数类问题，应使用分类讨论、枚举法。通常填空题设计的答案不会太大太麻烦，只需合理分类枚举即可。有时明显个数不多，难以找到第二个，则极有可能是 1 个，即结果是唯一的，此时可大胆猜想作答。

例 20 已知椭圆与双曲线共焦点（3，0）、（-3，0），且短轴重合。则两曲线交点轨迹所围成区域内部的格点数是_______。

分析：由题设，$C_1: \dfrac{x^2}{m+9}+\dfrac{y^2}{m}=1$. $C_2: \dfrac{x^2}{9-m}-\dfrac{y^2}{m}=1$. 其中 $0<m<9$.

设交点 $P(x_0,y_0)$,则有 P 在 C_1,C_2 上，知 $\dfrac{x^2}{m+9}+\dfrac{x^2}{9-m}=2$. 故 $x_0^2=9-m^2/9$.

从而，$y_0^2=m^2/9$, 故 $x_0^2+y_0^2=9$. 由画图知，围成区域内共 25 个格点。

注：最后一步“画图法”若改用代数方法，将较为困难。

例 21 已知集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, 映射 $f: S\to S$ 满足条件：对于任意的 $x\in S$，有 $f(f(x))=x$, 则满足条件的映射 $f(x)$的个数是________。

分析：$f(f(x))=x$ 的本质是对每个 x，都有 $x\to y, y\to x$. 此时 x,y 称为一对。若映射中有多个 x 对应一个 y，则必有一个 y 对应多个 x，矛盾。故 f 是一一映射，并且是满射。由此，用递推的方法寻找 $f(x)$的个数，记为 $g(x)$。显然 $g(1)=1$, $g(2)=2$. 对 $g(n)$, 考虑其中的第 1 个元素。若 $f(1)=1$, 则后面 2-n 这 n-1 个元素按题意排列，共 $g(n-1)$种排法。若 $f(1)\neq 1$, 设 $f(1)=x$, 则 $f(x)=1$. 剩余的 n-2 个元素按题意排列，各 $g(n-2)$种排法。又 x 有 n-1 种取值，故 $g(n)=g(n-1)+(n-1)g(n-2)$. 下面可以求出 $g(n)$的通项公式。作为填空题，可以逐个递推计算，节省时间。

由这道题可以看出，递推法在解填空题中起着至关重要的作用。尤其是对于后一种状态可由前一种状态变化而来的计数问题，找到递推公式，比直接计算往往更加方便。下面再举一例。

例 22 （全国中学生物理竞赛）六个相同的电阻，阻值均为 R，连成一个电阻环，六个接点依次为 1,2,3,4,5,6. 现有五个完全相同的这样的电阻环，分别称为 $D_1,D_2,D_3...D_5$. 现在将

D_2的 1，3，5 三点分别与 D_1的 2，4，6 三点用导线连接，然后将 D_3的 1，3，5 三点分别与 D_2的 2，4，6 三点用导线连接……以此类推，最后连接 D_5，D_4. 则全部接好后，在 D_1的 1，3 两点间等效电阻为________，在 D_5的 1，3 两点间等效电阻为_______。

分析略。这是一道很好的递推问题，不能硬算，要充分利用对称性，对电路进行变形，找到 D_{n-1}与 D_n的递推关系，再逐步推算。

在填空题中，有要求某个量的表达式类的题目。这是填空题比选择题难的重要原因，由于表达式几乎不可能“猜”出来。作为填空题，求这些值时可充分利用几何直观、代数直觉，不必要证明。特别是边角关系较多的立体几何问题，此法应用广泛。

例 23 正三棱柱底面边长与侧棱长都是 1，过底面的一边与上下底面中心连线的中点作棱柱的截面。则截面的面积为_________。

分析：作出图后，发现此图形“和谐对称”。立即想到截面是等腰梯形，求出上下底，高由勾股定理和 2/3 相似关系可得。$S=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

解函数表达式求值时，不必要求出一般情况的值，只需代入一些特殊值即可利用“答案的唯一性”。尤其是对于三角函数问题，对表达式略微化简后代入特殊角(0, 30, 45, 60, 90等)，往往问题迅速解决。

例 24 已知 x 是锐角，则函数$f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x}$的值域是_______。

分析：由均值不等式，原式≥2sinx cosx=sin2x. 而 x=45 时，sin2x 最大为$\sqrt{2}$，恰好取到等号.而代入 0,30,60,90 均比 f(45)大，且观察到关于 45 度对称，是单峰函数，故值域为$[\sqrt{2},+\infty)$.比起其他方法，笔者的方法也许更加节省时间。

在填空题中，往往有“经过多少次”“至少多少个”类问题，可直接应用模拟法。部分问题按题目要求模拟几次即可得到结果；否则模拟几次即可找到规律。在模拟时，若题目的参量无关紧要，可代入特殊值、较小的值简化计算；若题目参量开始较大，可从小的值开始试起，寻找规律。这类情况往往出现在以“年份”为参量的问题中，结果不外乎几种：0、1等特殊数，与年份无关；年份本身或±1 的附近数；年份除以某个较小的常数。究竟是哪一种，由小数据一试便知。

例 25 2008^{2008}的个位数字是_______。

分析：$2008\equiv 8 \pmod{10}$, 故 $2008^{2008}\equiv 8^{2008} \pmod{10}$. 而 $8^1\equiv 8$，$8^2\equiv 4$，$8^3\equiv 2$，$8^4\equiv 6$，$8^5\equiv 8$……每 4 个一循环。由于 $2008\equiv 0 \pmod 4$, 故 2008^{2008}的个位数字是 6. 本题中先通过小数据寻找循环规律，再利用同余解决。

填空题最好不要有空白，虽然猜对的可能性较小，但可利用直觉，应用特殊值法或试探法，加上初步的计算，得到可能的结论，一旦正确就是 9 分，不可轻言放弃。

同选择题一样，填空题同样要注意特殊情况、边界情况，考虑全面。例如代数中区间的开闭、边界处；分母为零、根式为负时；不等式等号成立时；变量恰好相等或为零时；数论、组合中的初始条件（1，2 个）时有特例；几何中恰好重合、共点、共线、共面，一般相交直线可能恰好平行等特殊情况；二次函数中判别式小于零、等于零；对称计数在遇到自对称元素时可能重复；两侧可能有相似情况而忽略一侧；求得的点在边界上；点求得的值出

现重复或负值不符合实际情况。对以上特殊情况，解题时要多加注意，应用特殊值法进行检查，避免计数时±1 的错误或计算中出现增根、漏根现象。

本文第六章中针对选择题的各种策略，有些对填空题同样适用，不再赘述。

第七章 抓住解答题的每一分

7.1 减少低级错误

解答题，是单题分数最高的题型，一定要留足时间，不要有来不及做的遗憾。一试解答题，通常难度不大，在时间充裕时均可解出，只是容易在细节上出问题。

我们知道，一试解答题的评分标准规定，每题 20 分，只设 5 分一档，即只有 0,5,10,15,20 五个分数。下面我们利用一试解答题的评分特点，一是对不会做的题尽可能“抢分”，二是对会做的题尽可能不丢分。

我们应当看到，5 分一档对考生认真细致的要求很苛刻，因为一道题如果仅有一个小错误，扣掉的不是 2-3 分，而是 5 分，较为严重。笔者在模拟赛中一道求椭圆半长轴取值范围的问题中，忘记舍弃增根，误把负的区间加入到正确答案中，显然是小错误，但一次性扣掉了 5 分，令人遗憾。

若要尽可能减少丢分，首先要注意审题。审题时，要特别注意：题目中各个标记符号代表什么？题目中各变量的定义域（包括实际问题隐含的定义域）是什么？变量间有什么大小关系？不等式等号是否有可能成立？递推中初始条件、终止条件是什么？关联词语是“存在”“任意”“有且仅有”还是“至多”“至少”？有无对结论的特殊要求？

其次是表达规范。这个问题在本文 2 节已作为基础出现，不赘述。

要在运算过程中注意细致，对较大的数尽量利用草稿纸笔算，而不是口算。尤其是在较长的题目中，特别注意开始时的计算（初始化）不能出错，否则前功尽弃。这里提供一种运算不易出错的方法：程序化简法。

所谓“程序法”，即为不跳步，严格按照计算规定的顺序进行计算，不要想当然。对每一种可能都要讨论，在没有充足的理由前不能认为某种可能“不存在”。尤其对于“特殊情况”，更要独立出来分类讨论，有可能此处“与众不同”。在较长的表达式化简过程中，可将反复出现的一个较为复杂的部分“令……为 A”使之独立出来，最后再把 A 代入原式，避免中间抄错，简化运算，在不等式放缩时还有利于观察式子特征。应特别注意去括号、开根号的正负号问题，笔者在此处经常出错。

例如这样一道题：已知 $n\in N^{+}, a_i\in \mathrm{R}^{+}, \sum_{i=1}^{n} a_i=1$，求和式 $\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot \log_2 a_i)$ 的值域，并证明之. 看起来此题并不难，只需证明一个不等式即可。事实上，要得到值域 $[-\log_2 n, 0)$.

除需证明最大最小不等式外，还需证明诸 $a_i=\dfrac{1}{n}$ 时取到最小值 $-\log_2 n$，一个 $a_i\to 1$ 时和式 $\to 0$(极限为 0)，中间的值均可取到(连续性). 否则会酌情扣分。

做到“会做的题不丢分”其实不难，关键是静下来做好分类讨论，使用“模块化处理”，

不要怕麻烦。

一试中不会做的解答题较少，万一思路受阻，应静下心来细细考虑，一般会很快有思路；但注意不能耽误过多的时间，若长时间没有任何想法，就应考虑“抢分”，将在 5.4 节中讨论。

7.2 尽可能寻找思路

数学竞赛中难题是常见的。尤其是在二试中，更是有全国无人能做的“废题”。正如文章开头所说，面对 50 分，取之不会，舍之可惜，如何“抢分”？

在正式决定“抢分”前，先尽可能寻找一个哪怕是不完整的思路。我们可以采用“广度优先搜索”的办法，甚至采用“双向搜索”，即从结论和已知分别出发，得出一些已知的充分条件、结论的必要条件。这种尝试的模式，在平面几何题中尤其奏效。

寻找思路，要学会“登高望远”，而不是“低头找路”。试想，在一个地形错综复杂的山区，如果漫无目的的寻找，是很难找到出路的。如果应用高科技手段，如卫星定位，我们就能较快的找到正确的路线。在解题中，巧妙的技巧就是“卫星”，当积累达到一定数量时，就能形成条件反射，对某一类问题有较为固定的解法。

下面举例说明，思路是如何找到的。为了真实再现考场的思考过程，我们假定一些“关键步骤”是考生无法想到的，而在此处被“卡住”。

例 26 （平面几何）平面上任意五条直线，其中每四条确定一条牛顿线，则所得的五条牛顿线交于一点。

注：四条直线两两相截得六个点，形成完全四边形。完全四边形的三条对角线的中点共线，成为此完全四边形的牛顿线。

不同于平面几何，下面我们提出一种运用行列式证明的方法。运用解析几何，对角线中点坐标为 $L(\frac{x_{14}+x_{23}}{2},\frac{y_{14}+y_{23}}{2}),M(\frac{x_{13}+x_{24}}{2},\frac{y_{13}+y_{24}}{2}),N(\frac{x_{12}+x_{34}}{2},\frac{y_{12}+y_{34}}{2})$ 要证明 L，M，N 共线，只需证 $\begin{pmatrix} 1 & x_L & y_L \\ 1 & x_M & y_M \\ 1 & x_N & y_N \end{pmatrix}=0$. 即证

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{x_{14}+x_{23}}{2} & \frac{y_{14}+y_{23}}{2} \\ 1 & \frac{x_{13}+x_{24}}{2} & \frac{y_{13}+y_{24}}{2} \\ 1 & \frac{x_{12}+x_{34}}{2} & \frac{y_{12}+y_{34}}{2} \end{pmatrix}=0.$$

这只是一个计算问题，并没有实质性困难。只需将左边一步步化简，最终会得到“值为零”。这就是采用解析几何法，辅以行列式，求解平面几何题的一种方法。

在例题中所介绍的结论，也可以用行列式证明：用行列式表示每条直线；证明一条直线在另两条直线所成直线束内，就是两行列式相加等于第三个；同理可得到其他的三线共点，问题得证。希望读者自行推算一下。

类似的，解析几何还可用于解决其他较为复杂的平面几何题。例如 1988 年的一道国家队选拔题：在△ABC 中，∠ C=30˚，O 是外心，I 是内心，边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E 使得 AD=BE=AB。求证 OI=DE 且 OI⊥ DE。

这道题问题描述很短，但难度非同一般。由于外心、内心“悬浮”在三角形中，与边角关系不紧密，用纯粹几何的办法难以下手。本题适合用解析几何解决，在推导过程中能得到著名的欧拉公式 $OI^2=R^2-2Rr$。注意到对任意的三角形，都有 OI⊥ DE，而∠ C=30˚可以推出 OI=DE。本题的证明很繁琐，有兴趣的读者可以一试。

例 27 （数论）试证明: 对任意正整数 p, 若 p, p+2 均为素数, 则对任意正整数 a, 满足: 若设 $a^p \equiv b \pmod{p(p+2)}$, 则 $b^p \equiv a \pmod{p(p+2)}$.

分析 乍一看，此题不是著名的“孪生素数”问题吗？显然数学竞赛中不会出如此难度的试题。我们观察问题，事实上是一个有趣的现象：将任何 a 乘方取模后得到 b，b 经过同样运算又回到 a。熟悉 RSA 加密算法的读者可能立刻有了思路。事实上，笔者命此题时，就是由 RSA 算法出发，选择质数 p,p+2, 令 $n=p(p+2)=(p+1)^2-1$，取 $ab\equiv 1 \pmod{(p-1)(p+1)}$，则对任意整数 A，$B\equiv A^a \pmod n$，而 $k^{ab}\equiv k \pmod n$ 此处取 $a=b=p$，即可满足题意。这里有定理：若一个正整数 m 是若干个不同素数的乘积，则对任意整数 a，有 $a^{1+\varphi(m)}\equiv a \pmod m$. 事实上，关于模为素数的高次同余方程，还有很多值得研究，请参考初等数论书籍。

由此可见，尽可能寻找思路，并不是不可完成的。只要耐心，一步步去推导，总有结论出现的时刻。

下面介绍雷勇老师创造的在解析几何中十分实用的“八分方案”。

针对一个解析几何题，只要是圆锥曲线与直线相交类型的（这种类型十分常见），首先设出未知的圆锥曲线方程或直线方程，注意题目的隐含条件，减少未知量个数；联立上述方程，写出联立后的二次方程；解出未知量，或将一个用另一个表示；注意验证二次方程的判别式，给出有根时的自变量取值范围，为舍弃增根做准备。在高考中，上述步骤通常价值 8 分，故称“八分方案”；在竞赛中的一试解答题至少占 5 分，同样不可小视。遇到难的解析几何题，不要放弃，联立方程就是 5 分，也为后面的解答铺平道路。尤其是判别式的问题，一定要在开始时予以解决，正如变量代换后要先给出新变量的取值范围一样，不仅避免最后忘记验根，还能在解题过程中及时排除一些不可能的范围，减少分类讨论的计算量。

从实质上说，“八分方案”就是“将自己的思路表达清楚”，不仅是解析几何，各种题型的解答题中都要尽可能做下去，把自己所掌握的知识用上、能构造的模型写出、能变形的表达式变换、能解的方程解出，不一定得到最终结论，而要争取阶段性成果。

7.3 “踩”准采分点

不论是否会做，都要清晰地表达自己的想法，以便得到部分分。表达清楚，就是当不能完全解出时，把自己脑中正在想的解题思路，用自然语言描述，再加上适当的数学符号和逻辑推理，有时会因此得分。具体描述方式，类似竞赛辅导书上的“分析”即可。不要因为

未最后证明或得出结论而“交白卷”。而解题思路的叙述，必须遵循“采分点”的设置规律，这样才容易由中间步骤得分。

竞赛评分标准规定，10 分一档，按档次给分。现在我们通过 2007 年全国联赛加试的三道试题，研究一下“采分点”是如何设置的。（加粗的部分为采分点）（见第十一节）

我们在做题时，应当时刻注意揣摩采分点的位置，争取“阶段性成果”。一般中间结论要求是一个完整的部分，有已知、推导和结论。如果有方程，一般是方程的解作为采分点；数学归纳法的结论常作采分点；几何中全等、相似证明、重要定理应用常作采分点；代数中巧妙的代换变形放缩、著名不等式应用常作采分点；组合问题中构造正例、反例位于采分点。答案中“下面证明……”，往往是前一阶段结束的标志。结论一般是要求整理并加以说明的。不要在离采分点一步之遥时停止，与分数失之交臂。另外，解题时可以应用一些标记，在采分点处重点强调，以免误判。

“踩”准采分点，是同样的解答思路，却有不同的分数的原因。尤其是当解答不完整或中间出错时，抓住“采分点”显得格外重要。

综上所述，针对竞赛中出现的不同题型，采用不同的手段，辅以常规方法，可将其各个击破。

第八章 高效抢分破解难题

在竞赛中，很多难题不能“瞬间破解”，则需要我们掌握一些常用的变形、构造的方法与手段，便于我们打开思路。

以下这些内容，每一种方法都是有丰富内涵的，都已经分别独立成一篇文章。为了总结“抢分”的具体策略，本文仅对以下方法的主要内容进行概述。若要进一步探究，请参考相关文章。

8.1 调整法——不等式的终结者

调整法，顾名思义，就是“自顶向下，逐步求精”的思维方法，就是逐步缩小问题规模，最终各个击破小问题。逐步调整法解不等式，可以称得上是一种“历史悠久”的方法，最早发表于 1987 年 8 月的《中学数学》杂志上。经过 20 年的发展，调整法已不限于不等式问题的求解，而进一步应用于组合极值、函数极值，甚至线性规划问题中。在信息学竞赛中，“模拟退火”的调整策略，估计也是从此处发展而来。

调整法的核心原理就是，将不等式中变量的个数减少，三元变二元，二元变一元，最终将复杂的不等式问题化为简单的二元不等式、一元函数求极值问题，化繁为简，大大降低问题的难度.

调整原理 假设 $\{a_1, a_2, \ldots a_n)$ 为任意实数数列. 做如下变换 Δ：

①选取 $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ 使 $a_i = \min\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$.

②令 $a_i = a_j = \dfrac{a_i + a_j}{2}$ 或 $\sqrt{a_i a_j}$ 或 $\sqrt{\dfrac{{a_i}^2 + {a_j}^2}{2}}$ 或 $\dfrac{2a_i a_j}{a_i + a_j}$.

设 $\Delta(a_1, a_2, \ldots a_n) = ({a_1}^1, {a_2}^1, \ldots {a_n}^1)$.

记 $\Delta({a_1}^k, {a_2}^k, \ldots {a_n}^k) = ({a_1}^{k+1}, {a_2}^{k+1}, \ldots {a_n}^{k+1})$, $k \in N^+$. (注意, 这里的 k 不表示次方, 表示的是迭代次数.) 则经过无限次 Δ 变换, $\forall\, a_i = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

注：在论文《证明不等式的“逐步调整法”》中，该定理称为“平均调整原理”。这里将其做了推广，应用到算术平均、几何平均、均方根平均、调和平均等运算上。

不等式调整定理 假设 $f: R \to R$ 是连续的对称(指任意交换若干自变量的位置, 函数均不变) 函数, 满足 $f(a_1, a_2, \ldots a_n) \geq f(\Delta(a_1, a_2), \Delta(a_1, a_2), a_3, \ldots a_n)$, 则有 $f(a_1, a_2, \ldots a_n) \geq f(a, a, \ldots a)$, 其中 $a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $\Delta(a_1, a_2)$ 是 a_1, a_2 通过算术平

均，几何平均，均方根平均或调和平均变换得到的.

由于本文重点不在论证定理，而在讲述方法，这里不给出定理的证明。注意，不等式调整定理只适用于对称式，对轮换式并不适用。

这样，我们就将 n 变量的函数极值(不等式)问题转化成单变量函数极值问题. 再令 $h(a_1,a_2)=f(a_1,a_2,\dots a_n)$，原命题转化为证明 $h(a_1,a_2)\ge h(\Delta(a_1,a_2),\Delta(a_1,a_2))$ 这个二元不等式问题.

琴生不等式 设 f(x)在区间 I 上是下凸函数，则 $\forall\, x_i\in I, p_i>0, i=1,2,\dots n$ 有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\ge f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right).$$ 式中等号当且仅当 $x_1=x_2=\dots=x_n$ 时成立.

琴生不等式，事实上是调整法的推广，实现了对一般函数从自变量到函数值的转化，但不能替代调整法的作用。

证明二元不等式，可以使用偏导数法。所谓偏导数，就是将多元函数的某一个变量视作真正的变量，而将其他变量视作常数. 以 x 为自变量的偏导数记作 $f_x(x,y)$.本文仅以二元函数为例，说明偏导数的应用.

对函数 $f(x,y)$,若令 $g(x)=f(x,y)$，则 $f_x(x,y)=g'(x)$. 这样，一元函数的求导公式和方法都可沿用到二元函数偏导数的计算上来.

首先，令 $g'(x)=0$，解出 $x=h(y)$. 若原函数是 R^2 上的连续函数,则满足 $g'(x)=0$ 的 x 为 $f(x,y)$ 的极值点所对应 x. 由于需要引入多元函数的极限，较为复杂，故这里不对函数的连续性及其证明进行讨论. 需要指出的是，我们在数学竞赛中遇到的函数不等式一般是连续的，由于它是由基本初等函数经过有限次四则运算和复合迭代得到的.

然后，将 $x=h(y)$ 代入原函数 $f(x,y)$，得到函数 $f(h(y),y)$，是 y 的一元函数. 这样，就将二元函数问题化归成一元函数的极值问题.

至于一元函数的极值问题，直接使用导数法，或利用函数性质即可解决。

例 1 a,b,c,d 为正数，求证：

$$\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\ge\frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

证明：记 $F(a,b,c,d)=\frac{1}{m-a}+\frac{1}{m-b}+\frac{1}{m-c}+\frac{1}{m-d}-\frac{16}{3m}$，则

$$F(a,b,c,d)-F(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d)=\frac{1}{m-a}+\frac{1}{m-b}-(\frac{1}{m-\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{m-\frac{c+d}{2}})$$

$$=\frac{m-b+m-a}{(m-a)(m-b)}-\frac{4}{m-b+m-a}=\frac{(m-b+m-a)^2-4(m-a)(m-b)}{(m-a)(m-b)(m-b+m-a)}\geq 0.$$

$$\therefore F(a,b,c,d)\geq F(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d).$$

$$\therefore F(a,b,c,d)\geq F(\frac{m}{4},\frac{m}{4},\frac{m}{4},\frac{m}{4})=0$$

$$\therefore \frac{1}{m-a}+\frac{1}{m-b}+\frac{1}{m-c}+\frac{1}{m-d}\geq\frac{16}{3m}.$$

调整法，在组合极值问题中也有重要应用。组合极值的特点是函数中变量多、运算复杂，直接证明组合不等式较为困难。这时利用调整法，固定若干变量，考虑一部分变化时的取值；再让这些变量活动起来，求整体的最值。具体来说，就是对函数 $f(x,y,z)$，固定变量 x，得到 $g(y,z)$，再证明 $g(y,z)\leq h(x)$，最后证明 $h(x)\leq C$，C 为待证的常数。

但有时，$h(x)$ 的表达式是分段函数，形如 $h(x)=\begin{cases}h_1(x) & x\in A\\ h_2(x) & x\in B\end{cases}$，这时需要分段讨论，类似用导数法证明不等式，需要分段证明解决。

从理论上说，调整法对多数对称不等式适用。实际应用时，可以先代入特殊值，观察对称式是否满足“逐步调整原理”，再决定是否使用调整法证明。因为有的对称式不满足调整原理，但确实在相等处取得最值，若盲目应用调整法只会误入歧途。尽管如此，调整法仍不失为一种解决对称不等式问题的“通法”。

8.2 二进制——追溯数字的本源

二进制，是计算机采用的计数方式，因为它简单，只有两种可能，便于处理。我国古代的“两仪生四象，四象生八卦”中就包含了朴素的“二进制”思想。

二进制在数学竞赛中，有重要作用。在集合问题中，如果涉及 2 的方幂，采用二进制思想解决问题，能把复杂的取整、同余操作转化为对二进制数位的运算，简化思考过程。

例 1 若 x 、y 、z ∈(0 ,1) ,证明 x (1 - y) + y (1 - z) + z (1 - x) < 1.

证明 因为 x 、y 、z ∈(0 ,1) ,所以 1 - x 、1 - y 、1 - z ∈(0 ,1) . 不妨将形如 a 与 1 - a 的两个数称为一组对偶数. 规定对偶数的排列顺序为XYZ ,其中 X = x 或 X = 1 - x , Y = y 或 Y = 1 - y , Z= z 或 Z = 1 - z . 构造如下函数(当出现 x 、y 、z 时,其相应位置用 1 表示;当出现 1 - x 、1 -y 、1 - z 时,其相应位置用 0 表示) : φ(100) = x (1 - y) (1 - z) , φ(101) = x (1 - y) z ,

则 φ(100) + φ(101) = x (1 - y) ; φ(010) = (1 - x) y (1 - z) , φ(110) = xy (1 - z) ,

则 φ(010) + φ(110) = y (1 - z) ; φ(001) = (1 - x) (1 - y) z , φ(011) = (1 - x) yz ,

则 φ(001) + φ(011) = z (1 - x) .易证 φ (000) + φ (001) + φ (010) + φ(011) + φ (100) + φ (101) + φ (110) + φ(111) = 1 ,即 φ(000) + φ(111) + [x (1 - y) +y (1 - z) + z (1 -

x)] = 1.

又 $\phi(000) = (1 - x)(1 - y)(1 - z) > 0$, $\phi(111) = xyz > 0$,所以, $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) = 1 - [\phi(000) + \phi(111)] < 1$.

分析 这是一道不等式题目，当然可以用“正统”的不等式方法求解。但此处给出的二进制方法，用 0、1 表示对称的两个状态，便于理解。事实上，不用二进制表示，直接写出较长的表达式，证明仍可进行。类似的题目有：已知正数 a 、b、c 、A 、B 、C 满足 $a + A = b + B = c + C = k$ 证明: $aB + bC + cA < k^2$.

例 2 （2008 国家队选拔）证明：对任意正整数 $n\geq4$，可以将集合 $G_n=\{1,2,...n\}$的元素个数不小于 2 的子集排成一列： $P_1, P_2, ... P_{2^n-n-1}$,使得 $|P_i\cap P_{i+1}|=2, i=1,2,...2^n-n-2$.

证明 我们把 G 的每个子集看做一个 n 位二进制数，若某数 i 存在于子集中，则第 i 位为 1；若 i 不属于子集，则第 i 位为 0. 这样，我们把复杂的集合运算转化为数的运算。

所要求的是找到 2^n-n-2 个二进制数排成一列，使得每两个相邻数都恰有两个相同位置上全为 1. 或者说，相邻两数取“与”运算后的二进制数有两个 1.

我们采用数学归纳法证明。当 n=4 时，序列 1100, 1110, 0110, 0111, 0011, 1011, 1010, 1111, 0101, 1101, 1001 满足要求。假设 n=k 时满足要求。对 n=k+1, 我们采用如下构造方法，先排所有首位为 0 的二进制数，按照 n=k 时的办法排下来，加上首位的 0，仍满足题意。这样，序列从 1100...0 开始，到 00..011 结束。对于所有首位为 1 的二进制数，我们需要一个引理。

引理 当 $n\geq3$ 时，可以将 G 的非空子集排成一列，使得 $|P_i\cap P_{i+1}|=1$.

我们用数学归纳法证明引理。当 n=3 时，序列 001, 011, 101, 110, 010, 111, 100 满足要求。假设 n=k 时成立。对 n=k+1，我们采用“分奇偶添首位”的办法。先将 n=k 时的数列复制一遍，对新的数列的奇数项的二进制数前面一位填上 0，偶数项填上 1，这样由于 n=k 时的序列个数为奇数 2^k-1，故前一组中填入的与后一组中填入的首位恰好分别为 0、1，这样便覆盖了除 100...0 之外的所有 k+1 位二进制数，且由于交替添首位，仍然满足相邻一个 1 相同。在数列最后填上 100...0，与前一个 1100...0 恰好差 1，满足条件，形成 $2^{k+1}-1$ 个数。证毕。

回到原题。对于所有首位为 1 的二进制数，只需在引理中交集为 1 的二进制数之前填上一位 1 即可使得相邻两个交集为 2。现在只需考虑首位为 1 的末尾与首位为 0 的开始这两个相邻数。首位为 1 的末尾，由引理，为 100..01；首位为 0 的开始，由归纳假设，为 010...01，满足题目条件. 由此，n=k+1 时也可构造出使得开头为 100...01 的二进制数。证毕。

分析 在本题的官方解答中，使用了大量的集合运算，其本质与上述解答相同。但上述解答易于理解，在解题时也较为形象，易于想到。这就是二进制“化抽象为形象”的功能。

例 3 设 S 是 n 元集合，$A_1,A_2,...A_k$ 是 S 的 k 个互不相同的子集，$k\geq2$. $|A_i|=a_i\geq1$ $(1\leq i\leq k)$. 证明：S 的不包含任一个 A_i 的子集个数不少于 $2^n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{2^{a_i}})$.

分析 有了上题的经验，我们把子集视为二进制数处理，仍采用数学归纳法证明。当 k=2 时，结论显然成立。设$|A_1\cup A_2|=m$, 则 $m\leq a_1+a_2$.于是 S 的不包含任一个 A_i 的子集个数为

$$2^n-2^{n-a_1}-2^{n-a_2}+2^{n-m}\geq 2^n(1-\frac{1}{2^{a_1}})(1-\frac{1}{2^{a_2}}).$$

设结论对 n=k 成立。对于 n=k+1，考虑所有包含 A_{k+1} 的集合，A_{k+1} 所在位均为 1，我们将这些位舍弃，得到 $n-a_{k+1}$ 位，先不考虑是否影响前面的 k 个集合，共有 $2^{n-a_{k+1}}$ 个集合。然

而，若存在某个 A_i 与 A_{k+1} 存在交集，则 $2^{n-a_{k+1}}$ 个集合中必有某些包含 A_i 不在 A_{k+1} 中的部分，而 A_i 在 A_{k+1} 中的部分全为 1，这样的集合不满足归纳假设，应舍弃。故不包含 $A_1 \ldots A_k$，但包含 A_{k+1} 的集合不多于 $2^{n-a_{k+1}}$ 个。而 n 个元素的子集共 2^n 个。所求值不少于 n=k 的个数乘以 $1-\frac{1}{2^{a_i}}$。故 S 的不包含任一个 A_i 的子集个数不少于 $2^n\prod_{i=1}^{k+1}(1-\frac{1}{2^{a_i}})$，归纳假设成立。

上题采用的“从反面考虑问题”的方法值得学习，先计算出总体，再计算出不满足条件的个数，相减即得结论。注意不等号的方向问题。由此可见，二进制只是一个思考问题的工具，具体表达仍可用集合论语言描述。

例 4 设 A 为正整数集 N 的一个非空子集，如果所有充分大的正整数都可以写成 A 中可以相同的两个数之和，则称 A 为一个二阶基。对 x≥1，记 A（x）为 A 中所有不超过 x 的正整数组成的集合。证明：存在一个二阶基 A 及正常数 C，使得对所有的 x≥1，都有 $|A(x)| \le C\sqrt{x}$.

证明 将每个正整数用二进制表示，由于结论中涉及根号，故考虑将二进制的位数缩小一半。但简单的分成前后两个部分不能解决问题，故考虑按奇偶性分类。将二进制数的奇数位分为一类，偶数位分为一类，设 A 集合为所有奇数位全为零的二进制数和所有偶数位全为零的二进制数的集合，则由于所有正整数均可表示成二进制，这个二进制数都能分开成奇数位部分和偶数位部分，分开后另一类位全部填 0，正好对应 A 集合中两类数中各一个，这两数之和即为此正整数。于是 A 为二阶基。下面计算 A 中元素的个数。对于所有奇数位全为零的二进制数，只有偶数位可能改变，位数缩小为一半，个数至多为 $O(\sqrt{x})$；对于偶数位为零的，个数也为 $O(\sqrt{x})$。故存在常数 C，使得 $|A(x)| \le C\sqrt{x}$。

分析 上述证明的最后，应用了渐进复杂度符号 O。它的意义是，准确数目大约是这个数量级，对本题来说就是乘上一个常数。O 中表示的内容是函数的大致变化速度，即当自变量线性变化时，函数值的变化速度。O 不表示实际大小，例如当 x 较小时，O(x)可能大于 $O(x^2)$, 因为其中的常数因子不同；但当 x 增大时，$O(x^2)$的增长速度快于 O(x)；当 x 足够大时，$O(x^2)$最终大于 O(x)。在不精确或只要求大致变化趋势的分析中，渐进复杂度 O 有重要用处。

在上题中，把正整数用二进制表示，并将奇数位、偶数位分开，是构造的亮点，也是二进制的绝妙应用。一般来说，0/1 选择类问题、涉及 2 的方幂问题可用二进制解决。子集问题当然属于 0/1 选择问题，每个元素只有选或不选两种可能。

我们注意到，以上例题 2，3，4 都是国家集训队选拔或培训试题，这说明二进制方法在难题中有普遍应用。下文中还将涉及二进制在组合等问题中的应用。

8.3 反证法——草船借箭的妙用

反证法，就是从反面假设，推出错误结论，说明原命题是正确的。说它“草船借箭”，是指借了“反面结论”之箭，增加了问题的条件。在待证结论很强而条件很少时，这个“反面条件”往往能起到至关重要的作用。

例 1 有一张 $n \times n$ 的方格纸, 先允许从中任意选择 $n-1$ 个方格染为黑色, 然后再逐步地将那些至少与两个已染黑的方格相邻的方格也染为黑色. 证明:不论怎样选择最初的 $n-1$ 个方格, 都不能按这样的法则染黑所有的方格.

分析 任意选择 $n-1$ 个方格染为黑色,选择哪些格作为 $n-1$ 个方格, 染黑后根据条件的要求又遵循什么规律, 最后的结果又是什么,并不是很明了. 若用反证法, 就有了比较,在变化中与都能染黑的情况比较,从变化中寻找规律, 假设成立的结论就成为一个很好的"参照物".

证明 假设能够染黑所有的方格, 那么,对于黑色区域来说, 方格纸的边界就是区域的边界. 如果将每个小方格的边长记作 1 ,那么,黑色区域的边界总长为 $4n$. 但在一开始时, 黑色区域仅包括 $n-1$ 个小方格,即使它们都互不相邻,其区域的边界长度也仅为 $4(n-1)$. 而在以后逐步扩大黑色区域的面积的过程中, 由于只能染黑那些至少与已染黑的区域有两条公共边的方格,所以,面积的扩大并未带来边界总长度的增加. 从而,边界总长度将始终不会超过 $4(n-1)$,矛盾. 因此, 我们不能按照法则染黑所有的方格.

评注 本题利用"边界长度"巧妙解决染色问题，在一类在方格纸中对相邻方格不断染色的问题有借鉴意义。

例 2 今有有限个砝码,它们的总重量是 1 kg ,将它们分别编号为 1 ,2 , …. 证明:从这有限个砝码中必可找出一个编号为 n 的砝码,它的重量大于 $\frac{1}{2^n}$ kg.

证明 假设不存在这样一个编号 n ,使得相应的砝码重量 $f(n)>\frac{1}{2^n}$ 假设共有 m 个砝码, $m > 0$. 从而, 有 $f(1)\le\frac{1}{2}, f(2)\le\frac{1}{2^2}, f(3)\le\frac{1}{2^3},\ldots f(m)\le\frac{1}{2^m}$ 求和得

$1=f(1)+f(2)+\ldots+f(m)\le 1-\frac{1}{2^m}$ 矛盾. 因此,所证命题成立.

分析 若采用正面证明，由于砝码的重量难以估计，故无从下手。但从反面考虑，发现恰好是等比数列，求和即矛盾。一般来说，针对"不存在""必可找出"一类存在性问题，均可采用反证法解决。

如果把"反证法"的本质看作是"反向思考"，那么倒放法、倒推法、淘汰法也都来源于"反向思考"。例如一道著名的国际竞赛题：运动会开了 n 天，发出 m 块奖牌，第一天发出 1 个又余下的七分之一，第二天发出 2 个又余下的七分之一，如此继续，直到第 n 天把所有奖牌发完。求 n，m。

对此题若采用正面方法，直接设出 n，m 并进行迭代推导，将难以解决，由于迭代次数 n、初始状态 m 都是未知的。然而从给定的"最后一天"倒退回去，就能得到递推关系式，进而求出通项公式。再利用数论知识，即可解决此题。此题已被小学数学竞赛采用，小学生不会求递推数列的通项公式，也只能采用倒推的方法逐步计算。

所谓"淘汰法"，就是古老的"筛法"。我们知道，在较早的时候，求素数的办法就是"筛法"，将 2~n 排成一列，从小到大扫描，如果当前数未被筛掉，则此数为素数，把当前数的所有倍数筛掉。这种简单的算法有较高的效率，至今在笔算中仍有实用价值。

我们考虑对 n 个数的排序，每次比较两个数的大小。有一种称为"快速排序"的方法，

在最坏情况下能够用 $O(n\log_2 n)$ 次比较得出顺序。下面我们证明它的最优性。对 n 个数的任意排列，共有 n!种不同的排列。每次比较，能够筛掉所有不符合的情况，在最坏情况下，留下的应该尽可能多，但不少于一半（否则我们就用另一半作为结论，使情况最坏）。这样每次问题的规模至多缩小为原来的一半。所以，我们至少需要用 $\log_2(n!)$ 次比较。根据近似公式，$\log_2(n!)\approx n\log_2 n$. 用上文中的渐进复杂度记号，可表示为 $O(n\log_2 n)$. 这就是用最朴素的“筛法”来排序，虽然效率很低，但能说明排序比较次数的下限。

在竞赛中应用“筛法”，主要就是上文中“试探法”，在所有可能中逐一讨论，去掉不合要求的取值，留下可能的取值。

8.4 算两次——换个角度看问题

算两次，就是从两个方面考察，“换个角度看问题”。

先举一个简单的立体几何中的例子。已知圆锥的母线长为 l，侧面的展开图为圆心角为 α 的扇形，求圆锥的底面半径 r。

一方面，展开图中扇形的弧长为 lα ；另一方面，这又是底面的周长 2πr. 所以，lα=2πr. 故 $r=\dfrac{l\alpha}{2\pi}$. 这样一个简单的例子，蕴含着“算两次”的核心思想：将一个量用两种途径表示出来，则两边相等，起到联系两边的作用。本节原来拟定的标题“搭桥接路巧解题”就是这个意思，算两次的中间量实质上是沟通条件与结论的桥梁。

下面我们通过一个引理，采用“算两次”方法证明一道竞赛题，再对著名的“圆内整点问题”进行初步探究。

引理 设 y=f(x)为严格的增函数，它的反函数为 x=φ(y), f(0)=0, f(a)=b, a,b 都是正数，曲线 y=f(x)的从 O(0,0)到 B(a,b)的这段弧上（包括端点 B，不包括 O）有 L 个格点，则有

$$\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[\varphi(h)]-L=[a]\cdot[b].$$

证明 设 A(a,0),B(0,b)，则考虑矩形 OABC 内的整点个数 s，不包括坐标轴上的，下同。一方面，在曲边三角形 OAB 内，每条直线 x=k 上有[f(k)]个格点；曲边三角形 OCB 内，每条直线 y=h 上有[φ(h)]个格点。OB 上的 L 个点被重复计算了一次，故 $s=\sum_{k=1}^{[a]}[f(k)]+\sum_{h=1}^{[b]}[\varphi(h)]-L$. 另一方面，显然 s=[a][b]. 命题成立。

评注 用上述证明方法，还可求解另一道经典问题：已知三角形的三个顶点坐标（均为整数），求三角形内部的格点数，进而求三角形面积。

例 1 设 n∈ N，求证 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\dots+[\sqrt{n^2}]=\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)$.

证明 取 $f(x)=\sqrt{x},\ a=n^2,\ b=n,$ 则 L=n 。由引理得，

$$\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}]=n^3+n-\sum_{k=1}^{n}k^2=n^3+n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5).$$

下面讨论圆内整点问题。设 r 为正实数，在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的格点数记为 R（r），则

$$\pi(\sqrt{r}-\sqrt{2})^2<R(r)<\pi(\sqrt{r}+\sqrt{2})^2.$$

证明 以圆内每个格点为左下方的顶点作边与坐标轴平行的单位正方形，由于正方形对角线为 $\sqrt{2}$，所以正方形内每一点到（0，0）的距离不大于 $\sqrt{r}+\sqrt{2}$,即所作的正方形都在圆 $x^2+y^2=(\sqrt{r}+\sqrt{2})^2$ 内，不等式右边成立。

对于圆 $x^2+y^2=(\sqrt{r}-\sqrt{2})^2$ 内的每一点 C，必有一个格点 D，以 D 为左下方顶点的边与坐标轴平行的单位正方形含有 C 点，所以正方形内每一点到（0，0）的距离不大于 $\sqrt{r}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{r}$,所以正方形在圆 $x^2+y^2=r$ 内。从而以圆 $x^2+y^2=r$ 内的格点为左下方的顶点作的在此圆内的单位正方形覆盖 $x^2+y^2=(\sqrt{r}-\sqrt{2})^2$，故不等式左边成立。

进一步的，由上述不等式，我们可知当 r 很大时，$R(r)\approx\pi r$. 更准确的说，$R(x)=\pi x+O(\sqrt{x})$. 事实上，O 内的符号 $x^{1/2}$ 是可以改进的，但必须大于 $x^{1/4}$. 这个命题的讨论，涉及高等数论知识，超出了本文的范围。

事实上，本题可转化成一个数论问题：令 r(n)表示 $x^2+y^2=n$ 的整数解(x,y)的个数，则显然 $R(x)=\sum_{n=0}^{x}r(n)$. 数论中有著名的公式 $r(n)=4(A-B)$, 其中 A 是 n 的 4k+1 型正因数个数，B 是 n 的 4k+3 型正因数个数。而因数的同余问题，同样是当今数学难题。

例 2 证明：$\sum_{j\geq 0}C_k^j C_l^j C_{n+k+l-j}^{k+l}=C_{n+k}^{k}C_{n+l}^{l}$

证明 由范德蒙恒等式，左边

$$=\sum C_k^j C_l^j \sum_{v\geq j} C_{n+k}^{k+v} C_{l-k}^{l-v}=\sum C_{n+k}^{l+v}\sum C_k^j C_l^j C_{l-j}^{l-v}$$

$$=\sum C_{n+k}^{k+v} C_l^v \sum C_k^j C_v^{v-j}=\sum C_{n+k}^{k+v} C_v^l C_{k+v}^v=C_{n+k}^k\sum C_n^{n-v} C_l^v=C_{n+k}^k C_{n+l}^n.$$

分析 本题中应用了求和步骤的改变，即交换和号。

例 3 用黑白两种颜色的珠子做项链，如果共用珠子 m 颗，l|m，每隔 l 颗颜色（第一颗与第 l+1 颗）总是相同的，并且 l 是具有这一性质的最小数，即 l 为“最小正周期”，问这样的项链有多少种？

引理 定义 $\mu(\text{n})=\begin{cases}1 & \text{n=1}\\ (-1)^k & n\text{为}k\text{个不同质数的积}\\ 0 & n\text{被一个质数的平方整除}\end{cases}$，则① $\sum_{d|n}\mu(\text{d})=\begin{cases}1 & \text{n=1}\\ 0 & n>1\end{cases}$

② $\sum_{d=1}^{n}\mu(d)[\frac{n}{d}]=1$ ③ $\varphi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$ ④若 f(n), g(n)为整数函数，且 $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$，

则 $g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})$.

证明略。本题运用了重要的“算两次”思想——反演。这里仅给出原题答案，$A(l)=\frac{1}{l}\sum_{d|l}\mu(d)\cdot 2^{\frac{l}{d}}$，留给读者思考。

从“换个角度看问题”考虑，用几何方法解代数题，也是一种不错的策略，尤其是对于较复杂的三角函数类题目。

例 4 证明在任意五个无理数中，总可以选出三个数，这三个数中，每两个的和为无理数.

解 将这五个数用五个点表示，如果两个数的和为有理数，就在相应的两点间连一条线．问题就化为一个图．从图论的观点来看，就是要证明有三个点，两两不相邻，没有线相连，即存在一个由三个点组成的“内因集”.

如果图中有三个点 x,y,z，两两有线相连，那么 x+y, y+z, z+x 都是有理数，从而推出 x，y，z 都是有理数，与已知矛盾，所以．图中无三角形．同理，图中也无五边形(即顺次连接五个点，这五条边组成的圈).

如果有一个点 x 引出的线≥3．设 x 与 y，z，u 相连，那么 y，z，u 彼此均不相连。否则产生以 x 为一个顶点的三角形。这三个点即为所求.

设每个点至多引出两条线．如果点 x 至多与一个点 v 相连．那么由于点 y,z,u 不构成三角形，所以必有两个点，例如 y，z 不相连．x，y，z 即为所求.

于是,图中每个点恰好引出两条线,由一笔画理论易知这个图是一个五条边组成的圈.这与上面所说矛盾，因而这种情况不会发生.

分析 本题巧妙的将有理数的问题转化为图论问题，利用了两相邻之和为有理数，则全部为有理数的性质，论证其中不存在环，从而得出矛盾。类似六个人中至少两人互相认识或不认识的论证方法。

例 5 某竞赛小组有 3n+1 个人，对每一个人，其余的人中恰好有 n 个愿与他学数学，n 个愿与他学物理，n 个愿与他学文化课。证明：竞赛小组内有 3 个人，他们之间学的内容三样俱全。

证明 将每个人视作点，每一点伸出三种异色边，分别代表三种内容。要证明图中有一个三边颜色均不同的三角形。考虑异色角的个数 S。每个顶点处有 $3n^2$ 个异色角，故 $S=3n^2(3n+1)$. 假设每个三角形至多有 2 个异色角，至多有 $2C^3_{3n+1}=(3n+1)(3n-1)n$ 个异色角，小于 S，矛盾。故至少有一个三角形有三个异色角，即三边不同色。

分析 本题采用“异色角”的个数作为中间变量，将边的异色问题转化。

山重水复疑无路，柳暗花明又一村。换个角度算两次，组合论证即得分。

8.5 归纳法——三生万物的玄机

老子说，“道生一，一生二，二生三，三生万物。”这就是我国古代朴素的“数学归纳法”思想。今天的自然数 Peano 公理体系，也是用这种方法建立起来，并由此推导出数学归纳原理，开辟了证明与整数有关问题的独特蹊径。

有人问，数学归纳法为什么好用，我们说，由于数学归纳法将一个大问题拆分成小问题，从而使我们可以各个击破。它的基本步骤是，首先证明在最简单的“平凡”情况下成立，这一般通过观察和实验可得；然后从 k 推向 k+1，可以利用 k 的结论，同时只增加了一项 k+1，易于分析和计算。由此，凡是可以拆分成若干整数阶段的问题，数学归纳法都有用武之地。数学归纳法尤其适用于求和类、递推类问题的证明。

用数学归纳法解题，主要分为两个步骤。首先，通过试验或构造提出归纳假设。然后，进行 n 到 n+1 的归纳证明。在不同的题目中，两个过程难度各有不同。

例 1 证明，有无穷多个满足下列条件的正整数。①它们的各位数字均不为零；②他们都可以被自己的各位数字之和整除。

分析 经过简单的试验可知，满足上述条件的正整数很多，但没有什么规律可循。故不能直接应用数学归纳法。我们不妨考虑全由 1 构成的正整数，发现由 3^n 个 1 构成的正整数能被 3^n 整除。于是我们用数学归纳法证明。

当 n=1 时，3|111，成立。

当 n=k 时，假设命题成立。则 $3^k|\underbrace{11\ldots1}_{3^k个}$. 由于 $\underbrace{11\ldots1}_{3^{k+1}个}=\underbrace{11\ldots1}_{3^k个}\times1\underbrace{00\ldots0}_{3^k-1个}1\underbrace{00\ldots0}_{3^k-1个}1$，上式右端数字和为 3，能被 3 整除，故 $3^{k+1}|\underbrace{11\ldots1}_{3^{k+1}个}$.

本题的难点在于，构造数列 3^k 个 1，提出归纳假设是困难的。

例 2 设凸 n 多边形可被它的具备下列性质的对角线分成若干个三角形。①从每个顶点引出的对角线都是偶数条；②每两条对角线除顶点外没有其他公共点。证明：n 是 3 的倍数。

引理 如果在凸 n 边形 $A_1A_2A_3\ldots A_n$ 中作了若干条对角线，且从 $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$ 所引出的都是偶数条对角线，则从顶点 A_n 引出的对角线一定也是偶数条。

引理显然，由于每条对角线被计算了两次，总数为偶数，减掉偶数，剩余仍为偶数。

回到原题。当 n=3 时，命题显然正确。现设 n=k 是某个大于 3 的自然数．我们假设当 3≤n<k 时，命题都已正确，要证 k 也是 3 的倍数．

将凸 k 边形中参与将它分为三角形且满足题目条件的对角线的集合记作 P。设从该凸 k 边形的顶点 A 至少引出了两条属于 P 的对角线．我们来从中选出两条对角线 AB 和 AC，使得在∠ A_1AB 内部含有偶数条由顶点 A 引出的属于 P 的对角线，而在∠ BAC 内部没有这样的由 A 引出的对角线，于是对角线 BC 属于 P。

现在研究多边形 $AA_1\ldots B$．由它的每个顶点(B 点可能例外)都引出了偶数条属于 P 的对角线．但按已证明的引理，从顶点 B 也一定引出了偶数条属于 P 的对角线．类似的推理对于多边形 $BB_1\ldots C$ 和 $CC_1\ldots A$ 也都成立．注意到多边形 $AA_1\ldots B$，$BB_1\ldots C$ 和 $CC_1\ldots A$ 的边数都小于 k，所以由归纳假设知它们的边数都是 3 的倍数，于是这三个多边形的边数合起来也是

3 的倍数，但这个数字刚好是原凸 k 边形的边数加上 AB，BC，CA 这 3 条线段所得，即为 k+3。所以 k 也是 3 妁倍敦．由数学归纳法原理知命题证毕.

在上述证明中，我们是将原来的凸 k 边形一裂为四，得到一个三角形 ABC 和三个多边形，然后通过引理验证三个多边形都符合题设条件，再对它们分别应用归纳假设．由于对这三个多边形的边数无法预先作出确切的估计，所以此处只宜于采用“设当 3≤n<k 时命题均已成立”的假设形式，而不宜于采用第一归纳法.

在本题的证明过程中，原命题不易证明，引入一个“引理”作为辅助命题，相当于找到一个“跳板”，化直接为间接。另外，第二数学归纳法的应用值得学习。

例 3 设 n≥2．今有一个，n×n(即 n 行 n 列)的数表，其中每两行数字都不完全相同．证明，一定可以从中删去一列，使得剩下的 n×(n-1)数表中，每两行数字仍都不完全相同。

分析 本题所涉及的数表是方的，即行数与列数相等，这种状况使得我们在作归纳过渡时，既要顾及行的方面又要顾及列的方面，因此不得不面对一个头绪纷繁的局面．而使归纳过渡难于奏效．既然如此，我们何不把考察的数表类型放得更广一些，借以来摆脱这种两头兼顾的局面呢?正是基于这种考虑，我们来把目标转向扁宽的 n ×m 数表，这里把行数不超过列数(注意：在数表中，横为行，竖为列)．并且设法来证明如下的命题：

命题 设 n≥2，且设有一个 n×m 数表，其中 m≥n．且每两行数字都不全相同．那么，可以从数表中划去 m-n+1 个数字，使得在剩下的 n ×(m-1)数表中，每两行数字仍都不全相同．我们来将 m 视为参变量，面对 n 进行归纳.

当 n=2 时，对任何自然数 m≥2，由于数表中的两行数字不全相同，所以一定有某一列数字中的两个数互不相同．留下这一列数字，并删去其余的 m-1 列数字，即知此时命题成立.

假设当 n=k 时，对任何自然数 m≥k，命题都能成立．我们要来证明，当 n=k+1 时，对任何自然数 m≥k+1，命题也能成立．注意此时的数表中，共有 k+1 行、m 列数字，我们要删去 m-k 列数字．先考虑由前 k 行数字所组成的 k×m 数表．由归纳假设知，此时可以删去 m-k+1 列数字，使得剩下的 k×(k-1)数表中，每两行数字仍然都不全相同.

我们再来自第 k+l 行数字中，划去相应的属于上述 m-k+1 列的数字，并将剩下的 k-l 个数字，按照原来的列属关系补在上述的 k×(k-l)数表的下端，得到一个(k+1)×(k-1)数表．如果这个数表的每两行数字仍然都不完全相同，那么只要从划去的 m-k+1 列数字中随便恢复出一列来，所得的(k+1)×k 数表都为所求．如果所补入的第 k+1 行数字与前而的某一行数字完全相同，那么一定能在所删去的 m-k+1 列数字中找出一列来，使得在这一列中的这两行数字不同．只要将这一列数恢复出来，那么所得的(k+1)×k 数表亦即为所求.

可见当 n=k+l 时，命题也可对一切自然数 m≥k+1 成立。这样，我们便证得了，对任何自然数 n≥2，命题都可对一切自然数 m≥n 成立．只要在命题中取 m=n，即可得到所要证明的原命题。

分析 本题中，采用了数学归纳法中的重要技巧“加强命题”。有时原命题的限制条件过多，不利于数学归纳，可以考虑加强成一般情况，便于分别归纳。尤其适用于题中两个变量相同取值，而两个变量即使不同取值也成立的情况。另外，如果待归纳的结论是关于较大的数，如年份，不妨找到这类数的通性，如奇偶性、同余、质数、平方数等，利用字母推导将更方便归纳。在不等式证明中，如果是严格的不等号，而其极限又不能达到，可以考虑“加强命题”，改成使等号恰好可能成立的数，或改为表达式的确界，便于观察特征并证明。

相同题目（陶平生命题、解答） 任意给定$n\ (n\geq 2)$个互不相等的n位正整数，证明：存在$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得将它们的第k位数字都删去后，所得到的n个$n-1$位数仍互不相等.

证明 设这n个n位数为$a_1,a_2,\cdots,a_n$.

用反证法，若对于每个$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，删去这组数的第k 位数字后，所得到的n 个$n-1$位数$a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk}$中，都至少有两个数相等，设$a_{ik}=a_{jk}$，因原来相应的两数$a_i\neq a_j$，则$a_i$，$a_j$被删去的第$k$ 位数字必不相同，称这样的一对数a_i，a_j为“具有性质P_k”（a_i，a_j只有第k 位数字不同，其它位置上的数字对应相同）．

今用n 个点$v_1,v_2,\cdots,v_n$分别表示这n 个数，若某一对数a_i，a_j具有性质P_k，$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，则令相应的点v_i，v_j相邻，于是得n 阶图G ．

据反证法所设知，图G 中至少有n 条边，故必有圈，不妨设此圈为$v_1v_2\cdots v_rv_1$，（否则可将这n 个数重新编号；又对于互不相等的若干个n 位正整数，同时将每个数的第i, j 位数字对换位置，并不改变本题的性质），

那么前r 个数为：

[illegible]　　[illegible]

[illegible]　　[illegible]

……　……　…………

[illegible]　　[illegible]

这里，不同的字母表示不同的数字，据此知，删去各数（自左向右）的第r 位数字后，所得的两个$n-1$位数a_{rr}与a_{1r}并不相等，其中，

[illegible]，[illegible]

也就是说，圈$v_1v_2\cdots v_rv_1$中的边v_rv_1并不存在，矛盾.

因此，图G 中不可能有圈，故图G 中的边至多有$n-1$条，这与反证法的假设相矛盾，从而结论得证.

分析 事实上，这种解法即使用普通语言叙述，也能叙述清楚。但这样的表达不如图论语言简洁、严密。包括图论在内的“高级”结构，都是为了说理简便、严密而使用的，并不是多么“高深”，不必望而生畏。

小结 同一道题，两种不同表现形式，两种不同的解法。一种使用数学归纳法，另一种使用图论。由此可见，“条条大路通罗马”，数学竞赛题有时可以“一题多解”。

数学归纳法，只要选好归纳对象，提出归纳假设，做出归纳证明，在整数问题中因其简单、自然的思路，符合人类“从特殊到一般”的思维规律，受到广大命题人、选手的青睐。

我们看到，上面的很多例题并不只用了一种方法，而是多种技巧的综合应用。这体现了难题对综合素质的要求。事实上，能够巧妙运用于解题的远不止以上五种方法。例如行列式，也是解题的重要工具，由于涉及较多高等数学内容，本文不再讨论。

第九章 瞒天过海——抢分的必杀绝技

“瞒天过海”，这招在本文中，可以说得上是唯一“不道德”的一招，但在竞赛实战中，确是很有用的一招，故笔者称之为“必杀绝技”。“骗过阅卷人的眼睛”，就是在某一步说不出理由时采用巧妙的方法进行掩盖，若阅卷人不仔细研读就会把分数送给考生。此招在平面几何、组合证明题中尤其奏效。越复杂的试题，越不容易发现破绽，就越容易实现“抢分”。下面提供十个行之有效的招数。

9.0 瞒天过海不露马脚

在使用下述十招时，应特别注意“伪装”的结论必须是正确的。一旦结论错误，马上露出马脚，所有招数失效，分数也会成为泡影。在使用“瞒天过海”之计前，应先从结论入手倒推，确保中间结果每步正确且可逆。另外，如果一个命题长期找不到证明，则很可能是错误的，直觉上的正确可能是由于思维惯性、图形特殊、代入值特殊，不一定普遍适用。此时应先另寻他法，万不得已再“抢分”。

在“抢分”中，要把握“少骗”的原则，只对个别“卡住”的地方进行隐瞒，有可能成功；即使被发现，也只扣除“抢分”部分的分数，而不影响其他部分的得分。由此可见，由于一步卡住而不继续做的想法是错误的，不如暂时承认中间结论是正确的，继续向下做。尤其不要通篇错误、处处抢分，否则解题过程与标准答案相去万里，阅卷人一定认为是“新方法”而仔细研读，其后果不堪设想。

本节提供的例题较少，方法需要同学们在平时练习中自行体会。（明知是错解，还有什么必要拿出来炫耀？例题再版时会补充的。）事实上，正解的部分证明过程去掉后，就能构造出“瞒天过海”的错解。希望同学们自行研究，找出问题的正解，并进行比较，观察体味“抢分”的技巧。

9.1 角度变换笑里藏刀

此招是在几何中角度变换的连等式中将一个尚未证出的角相等藏入其中，从而导出需要的等角。由于角度变换连等式往往不在中间步骤注明理由，因此是未证出的角最好的藏身之地。使用此招时，要确定欲证的两角是等角，这点可以从几何直观或结论的需要加以确定。

9.2 全等相似暗藏杀机

此招是在平面几何中将未证出的边角关系藏入全等形、相似形的证明过程中。由于相似、全等往往在各个边角关系凑齐之后一句话“因此两三角形全等”，而不注明全等关系的来源，阅卷人一般也不会逐个寻找全等条件。所以若某个条件未证明，直接忽略这个条件，承认三角形全等或相似，是平面几何“抢分”最不易被发现的“安全”策略。

例 31 （1998 年全国高中联赛）设 O，I 分别是△ABC 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上。求证：△ABC 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径。

分析：设△ABC 旁心为 K，连接 OK 交 BC 于 H，AK 交 BC 于 E。因为 K 是旁心，故

∠BCK 是∠ABC 外角平分线，又 BO 是∠ABC 平分线，故∠ABO=90˚，BK⊥OB。同理 CK⊥CO。故 B、O、C、K 四点共圆。又 OB=OC，故△OBK≅△OCK。故 OK⊥BC，OK 是 BC 边的垂直平分线。故只需证 HK=OC。∠ABI=∠IBC=∠B/2, ∠CBK=∠CAK=∠A/2. ∠AKB=∠ACB=∠C, ∠BAK=A/2. （把已知角度关系全部列出，便于考虑问题，也利于采点给分）（下面用“抢分”法证三角形全等）由于∠OHB=∠CHK=90˚，BH=HC，∠AED=∠CED（此“抢分”方法由谭捷同学提供，十分巧妙，笔者一时忘记，等待本文再版时补充）

“偷梁换柱”，是“抢分”的常用策略，可以将未证化为已证，迷惑阅卷人，达到提高分数的目的。

9.3 作图诡计增兵添将

此招是故意利用作图时的误差，将几何图形做得不准确，从而获得“意外”的条件。一般作错误图形的方法有：不共点的三线默认共点、不共线的三点默认共线，免去了证明共点共线问题，为题目解决增添条件。这样的作图误差事实上利用了“默认法”，将本来正确的结论不加证明的引用，不易被发现。

例如，在例 30 中，若默认 A、I、E 三点共线（事实上可以证明），又能得到“新版”错解。

例 32 （经典悖论）在锐角△ABC 中，AD 是∠BAC 的平分线，交 BC 于 D。EF 是 BC 边的垂直平分线，交 BC 于 E，交 AD 于 F，不妨设 F 在△ABC 内。连接 BF、CF。过 F 作 AB、AC 边的垂线，垂足分别为 G、H。因为∠BAD=∠CAD，∠AGF=∠AHF，AF=AF，故△AFG≅△AFH。故 AG=AH，FG=FH。因为 EF 垂直平分 BC，有 BF=CF。由于∠AGF=∠AHF=90˚，有△BFG≅△CFH（HL）。故 BG=CH。又 AG=AH，得 AB=AC。即△ABC 是等腰三角形！显然矛盾。

这就是作图错误的“魅力”。问题出在“不妨设 F 在△ABC 内”，因为根据角平分线性质，若 AB>AC，必有 BD>DC，此时 E 在 BD 上，与 AD 交于△ABC 外；AB<AC 同理。AB=AC 时 D、E 重合，谈不上什么证明。

这个经典悖论启示我们，在“不妨设”时一定要注意题目的隐含条件，不要设出非必然的或根本错误的命题。但问题无法解决时，这也是“抢分”的好方法。

9.4 不等变形卧虎藏龙

在不等式中，往往有“证不出来”的情况。这时应用特殊值法，代入几组各具特点的特殊值，就能判断放缩的方向、式子的结构、等号成立的条件。设计特殊值，犹如为程序调试设计测试数据，需要涵盖各个方面的情况，注意边值、中值等特殊情况。这也是反证法“构造反例”的基本方法。

判断不等式变形的方向后，可“瞒天过海”，从冗长的推导步骤中出现一步“默认”或“不知原因的变形”。实际上此法容易被发现，不如“曲解定理”或“巧用方程”严密。但设计特殊值代入，探究变形方向的方法，即使在正规的解题过程中也是经常使用的。

在“作图诡计”一招中的“不妨设”法，在不等式中有重要应用。对于对称不等式，“不妨设”变量间的大小关系，无论是利用排序不等式、切比雪夫不等式，还是直接作差、作比，都会十分方便。如果是轮换对称式，“不妨设”就成了“抢分”行为，由于这样没有理论依

据。一个反例是：（国家集训队试题） 已知 $a,b,c,d\in R^{+}$，且 $a+b+c+d=1$. 求证 $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+d}}+\frac{d}{\sqrt{d+a}}<\frac{3}{2}$. 此题显然不符合“中值”“边值”原理，故此法不能滥用。

同样，在几个变量的和任意时，对齐次不等式，我们可以设出变量和为 1，利用和为 1 的特点进行代换，便于变形。但如果是非齐次不等式，可以通过代换或恒等变形变为“齐次型”，若没有办法变形时也可以动用“不妨设”，但前提是必须保证结论的正确性。

9.5 直觉推断兵不血刃

在某些问题中，直觉在解题时占举足轻重的地位。而这种不严密的做法，不能在卷面上体现，故可用“由题意知”“易得”等词语加以跳过，若确实是简单易见又表述不清的问题，阅卷人也会理解。许多问题的标准答案中，也采用了这一策略回避“说不清”的问题。但要注意重要的必须证明的中间结论，不能用“直觉”写出，不如默认，今后直接引用，否则无异于让错误自行暴露出来。

9.6 巧用方程一语攻心

如果在问题的最后，较为复杂的问题不易被解决，可以采用“解方程”的办法。由题意及前面的论证可以列出一些方程组。转化为方程组问题后，本身问题就简单了许多；然后采用消元化简的手段，并将化简过程和结果写在卷面上，造成“方程是解出来的”假象。然后对化简后的方程组，应用特殊值法、试探法“猜”出方程的解。最后添上“解得……”写明结论，是巧用方程的关键。此法之所以“一语攻心”，是因为只需简单的试探或凭借直觉，“解得”一语解决问题，掩盖了不会解的麻烦。

9.7 文字描述避开逻辑

如果在数论、组合问题中，遇到一些直觉上显然但“说不清楚”的中间结论，可避免使用数学符号，改用文字语言进行说明。由于自然语言本身就具有直觉性，逻辑性不强，所以文字描述可以绕开严密的逻辑推理，从而达到“一想就大概那么回事”“差不多混过去”的目的。这个方法也是易于补充说明的，若想到了严密的论证，可以用数学符号补充论证，这样比单纯的符号论证更加清晰易懂。

9.8 曲解定理狐假虎威

有时待证的中间结论与某个定理的形式十分相似，这时可巧妙伪装，曲解定理，利用“定理”的权威“瞒天过海”。

几何中的梅涅劳斯定理、塞瓦定理及其角元形式，可注明“在△ABC 中，对截线 EF，由××定理得”，这样显得有依据，一般不会引起怀疑；此时悄悄将比例线段、角的正弦偷换，即可达到目的。尽量把比例线段、角的正弦转化到一个三角形中，排列成大致“绕一圈”的形式，更不易被发现。

不等式中的著名不等式，由于形式简单，曲解容易被发现，故采用“加强”的方法。对于对称不等式，有类似著名不等式的结构时，可以将著名不等式“推广”，以放缩到需要的表达式。注意放缩后的表达式与原式的不等关系必须是正确的，放缩后的表达式也必须有利于后面解题，避免“放过头”。

“曲解定理法”还有一个好处，就是易于补救。若在后面的解题过程中发现了上述“曲解定理”的证明方法，可以在原处改为“由引理得”，解答的最后附上“引理及其证明”，这样既不影响卷面整洁，又严密、无懈可击了。

9.9 先猜结论令敌失色

对于一些直觉上或试验后结论显然，证明却困难的非证明题，可采用“先说明结论”的方法，让阅卷人感到考生已将此题解出；再逐步阐述自己的理由，这样似乎“不战而屈人之兵”，更容易隐藏证明中的不完整之处，因为也许是考生认为是显然而略过的，大大提高了得分的概率。使用此招，风险较大，必须首先确定结论的正确性，因为一旦结论错误，先说明错误的结论无异于“自投罗网”。

9.10 铺天盖地绝地反击

如果所有方法都不会，上述九条“妙计”也派不上用场，这里有绝地反击的一招——铺天盖地的写，把题目条件所能引申出的结论全部罗列出来，也许其中有用的部分出现在标准答案的解题过程中，可以得到部分分。铺天盖地，又称“火力覆盖法”，在思考过程中也是有广泛应用的，便于挖掘隐含条件，避免顾此失彼，对条件“视而不见”。只要足够耐心，理论上说此法可解出任何竞赛难题，只是时间有限，对一些巧妙的变形，我们还没有来得及“试到”。纵然如此，在常规方法全部失效时，作为“绝地反击”，读者不妨一试。

在一些足够困难的题目中，往往需要综合运用上述技巧。

例 33 （第 48 届 IMO）设 n 是一个正整数，考虑 $S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{0,1,...n\}, x+y+z>0\}$ 这样一个三维空间中具有$(n+1)^3-1$ 个点的集合。问：最少要多少个平面，它们的并集才能包含 S，但不含(0,0,0).

分析：这是一类实代数几何问题，值得关注。但刚拿到这道题时，很难想到它与代数问题相关，而更多的从组合几何的角度来考虑。我们首先希望构造一组可行解，再加以证明。在大脑中先想象出这个图形，即 $n\times n\times n$ 的空间点阵被挖掉了一个角。有以下几种方案：与各坐标轴均成 45°的一组平面截点$(x+y+z=k)$；与各坐标轴确定平面平行的三组平面$(x=i, y=i, z=i)$截点……有趣的是，以上两种看来“和谐对称”的方法都是 3n 个平面。由此猜想，结论为 3n，迈出了解题的重要一步。下面的证明由于用到多项式的有关知识，本文从略。

在这个问题的猜想过程中，也许看不到这些“招数”的身影。实际上，真正的武林高手在比武时，已将各种招数灵活运用，随机应变，达到一种境界，此时无招胜有招。希望同

学们不要拘泥于这些“抢分”策略，能够将“抢分”与传统方法相结合，多加练习，灵活运用于思考与解题中。

在所有的“必杀绝技”中，请同学们注意：如果阅卷老师十分认真，以上十招全部失效。但从实际竞赛阅卷过程来看，由于阅卷速度很快，加之阅卷人对竞赛内容不完全了解，如能巧妙运用“瞒天过海”之法，在解答题，尤其是二试难题中还是能发挥不小的功效，堪称“抢分经典”。“瞒天过海”，就是“化错误为正确，化腐朽为神奇，化零分为妙解，化难题为容易”。

第十章 实战演习——抢分的实际应用

空谈理论是没有作用的，下面通过几组竞赛真题，见证“抢分”的神奇力量。

10.1 2007 全国高中联赛

注：加粗部分为“采分点”，照应第八节相关内容。

例 28 （平面几何）如图，在锐角△ABC 中，$AB<AC$，AD 是边 BC 上的高，P 是线段 AD 内一点。过 P 作 $PE\perp AC$，垂足为 E，作 $PF\perp AB$，垂足为 F。O_1、O_2 分别是△BDF、△CDE 的外心。求证：O_1、O_2、E、F 四点共圆的充要条件为 P 是△ABC 的垂心。

证明：连结 BP、CP、O_1O_2、EO_2、EF、FO_1。因为 $PD\perp BC$，$PF\perp AB$，故 B、D、P、F 四点共圆，且 BP 为该圆的直径。又因为 O_1 是△BDF 的外心，故 O_1 在 BP 上且是 BP 的中点。同理可证 C、D、P、E 四点共圆，且 O_2 是的 CP 中点。综合以上知 $O_1O_2\parallel BC$，所以$\angle PO_2O_1=\angle PCB$。因为 $AF\cdot AB=AP\cdot AD=AE\cdot AC$，**所以 B、C、E、F 四点共圆**。

充分性：设 P 是△ABC 的垂心，由于 $PE\perp AC$，$PF\perp AB$，所以 B、O_1、P、E 四点共线，C、O_2、P、F 四点共线，$\angle FO_2O_1=\angle FCB=\angle FEB=\angle FEO_1$，**故 O_1、O_2、E、F 四点共圆**。

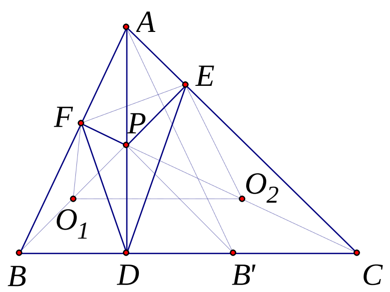
必要性：设 O_1、O_2、E、F 四点共圆，故$\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180°$。

由于$\angle PO_2O_1=\angle PCB=\angle ACB-\angle ACP$，又因为 O_2 是直角△CEP 的斜边中点，也就是△CEP 的外心，所以$\angle PO_2E=2\angle ACP$。因为 O_1 是直角△BFP 的斜边中点，也就是△BFP 的外心，从而$\boldsymbol{\angle PFO_1=90°-\angle BFO_1=90°-\angle ABP}$。因为 B、C、E、F 四点共圆，所以$\angle AFE=\angle ACB$，$\angle PFE=90°-\angle ACB$。于是，由$\angle O_1O_2E+\angle EFO_1=180°$得

$(\angle ACB-\angle ACP)+2\angle ACP+(90°-\angle ABP)+(90°-\angle ACB)=180°$，即$\angle ABP=\angle ACP$。又因为 $AB<AC$，$AD\perp BC$，故 $BD<CD$。设 B'是点 B 关于直线 AD 的对称点，则 B'在线段 DC 上且 $B'D=BD$。连结 AB'、PB'。由对称性，有$\angle AB'P=\angle ABP$，从而$\angle AB'P=\angle ACP$，**所以 A、P、B'、C 四点共圆**。由此可知$\angle PB'B=\angle CAP=90°-\angle ACB$。因为$\angle PBC=\angle PB'B$，

故$\angle PBC+\angle ACB=(90°-\angle ACB)+\angle ACB=90°$，故直线 BP 和 AC 垂直。由题设 P 在边 BC 的高上，**所以 P 是△ABC 的垂心**。

分析：作为一个与“圆”密切相关的题目，“四点共圆”当然是考查的重点。从题目图形中可以看出，此题不宜用边的关系解决，也就排除了“三角解法”。利用圆内丰富的角度关系和三角形巧合点（各心）的性质，构造四点共圆，是解决本题的关键。



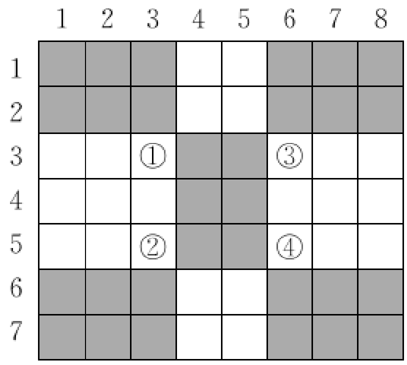
例 29 （组合问题）如图，在 7×8 的长方形棋盘的每个小方格的中心点各放一个棋子。如果两个棋子所在的小方格共边或共顶点，那么称这两个棋子相连。现从这 56 个棋子中取出一些，使得棋盘上剩下的棋子，没有五个在一条直线（横、竖、斜方向）上依次相连。问最少取出多

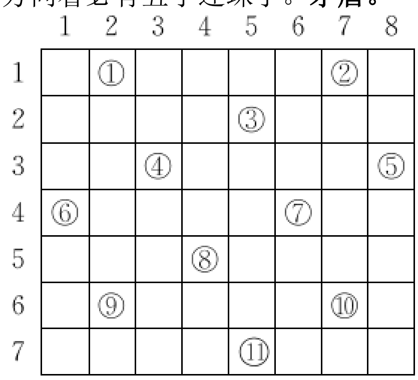
少个棋子才可能满足要求？并说明理由。

解：最少要取出 11 个棋子，才可能满足要求。其原因如下：

如果一个方格在第 i 行第 j 列，则记这个方格为(i，j)。

第一步证明若任取 10 个棋子，则余下的棋子必有一个五子连珠，即五个棋子在一条直线（横、竖、斜方向）上依次相连。用反证法。假设可取出 10 个棋子，使余下的棋子没有一个五子连珠。如图 1，在每一行的前五格中必须各取出一个棋子，后三列的前五格中也必须各取出一个棋子。这样，**10 个被取出的棋子不会分布在右下角的阴影部分**。同理，**由对称性，也不会分布在其他角上的阴影部分**。第 1、2 行必在每行取出一个，且只能分布在(1，4)、(1，5)、(2，4)、(2，5)这些方格。同理(6，4)、(6，5)、(7，4)、(7，5)这些方格上至少要取出 2 个棋子。在第 1、2、3 列，每列至少要取出一个棋子，分布在(3，1)、(3，2)、(3，3)、(4，1)、(4，2)、(4，3)、(5，1)、(5，2)、(5，3)所在区域，同理(3，6)、(3，7)、(3，8)、(4，6)、(4，7)、(4，8)、(5，6)、(5，7)、(5，8)所在区域内至少取出 3 个棋子。这样，**在这些区域内至少已取出了 10 个棋子**。因此，在中心阴影区域内不能取出棋子。由于①、②、③、④这 4 个棋子至多被取出 2 个，从而，从斜的方向看必有五子连珠了。**矛盾。**





第二步**构造一种取法**，共取走 11 个棋子，余下的棋子没有五子连珠。如图 2，只要取出有标号位置的棋子，则余下的棋子不可能五子连珠。

综上所述，**最少要取走 11 个棋子**，才可能使得余下的棋子没有五子连珠。

分析：这是“试探法”的经典应用，构造正例、反例是解决本题的关键，需要构造技巧和对称性的应用。

此题经过推广，可以得出加强结论：当 n>5, m>5 时，至少取出 $[\frac{mn}{5}]$ 枚棋子。（2008 年第 2 期《中等数学》）读者可以思考 k 子棋问题：将题目中的五子连珠换成 k 子连珠，对 n×m 的棋盘至少放多少棋子？本题较为困难，这里可以给出两个初步结论：（1）对所有的 k，棋子数不少于 $[\frac{mn}{k}]$，因为每行中每 k 个子中至少有一个；不多于 $[\frac{2k-1}{k^2}mn]$，按照由宽度为 1 的横竖长条围成若干边长为 k-1 的方格矩阵，是可行方案。（2）当 k= p^2+1（p 为整数）时，棋子数恰为 $[\frac{mn}{k}]$，构造方法与五子的类似，由 1×2 跳改为 1×p 跳。

例 30 （代数问题）设集合 $P=\{1，2，3，4，5\}$，对任意 $k\in P$ 和正整数 m，记 $f(m，k)=\sum_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$，其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数。求证：对任意正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m，k)=n$。

证明：定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\,|m\in N^*，k\in P\}$，其中 N^*为正整数集。由于对任意 k、$i\in P$ 且

$k \neq i$，$\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$是无理数，则对任意的 k_1、$k_2 \in P$和正整数 m_1、m_2，$m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1}$当且仅当 $m_1=m_2$，$k_1=k_2$。由于 A 是一个无穷集，现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列。对于任意的正整数 n，设此数列中第 n 项为$m\sqrt{k+1}$。下面**确定 n 与 m、k 的关系**。若$m_1\sqrt{i+1} \le m\sqrt{k+1}$，则$m_1 \le m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$。由 m_1 是正整数可知，对 i=1，2，3，4，5，**满足这个条件的 m_1 的个数**为$\left[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]$。从而 $n=\sum\limits_{i=1}^{5}\left[m\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]=f(m,k)$。因此对任意 $n \in N^*$，存在 $m \in N^*$，$k \in P$，使得 $f(m, k)=n$。

分析：此题较为抽象，关键就是第一步构造集合 A。排序构造数列，寻找项数与项的关系，然后应用数集、整数的性质求解。

10.2　2008 全国联赛 A 卷

至于 2008 年的全国联赛，虽然较为简单，但越是简单的试题，评分标准越严格，就越要求我们表达严密、不能丢分。我们不妨也进行观察。

首先我们来看联赛加试 A 卷，也就是多数省市竞赛时所使用的试卷。本次竞赛试题较有个性，平面几何问题“平面”味不浓，“解析”反而“粉墨登场”。这也是平面几何问题的重大变革。而通常没有出现的数论问题登上了联赛的舞台，虽然难度不大，但给我们以提示，联赛不一定不考数论、组合，还是应当加强这方面的训练。数列问题与极限、导数相联合，体现出代数问题的综合性，并且这个构造值得玩味。

一、（平面几何）（本题满分 50 分）

如题一图，给定凸四边形 $ABCD$，$\angle B+\angle D<180^\circ$，$P$ 是平面上的动点，令 $f(P)=PA\cdot BC+PD\cdot CA+PC\cdot AB$.

（Ⅰ）求证：当 $f(P)$ 达到最小值时，P,A,B,C 四点共圆；

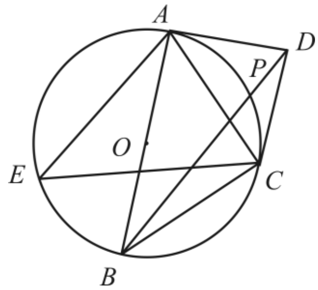
（Ⅱ）设 E 是 $\triangle ABC$ 外接圆 O 的 AB 上一点，满足：$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1$，$\angle ECB=\dfrac{1}{2}\angle ECA$，又 DA,DC 是 $\odot O$ 的切线，$AC=\sqrt{2}$，求 $f(P)$ 的最小值.

[解法一]　（Ⅰ）如答一图 1，由托勒密不等式，对平面上的任意点 P，有

$$PA\cdot BC+PC\cdot AB\geq PB\cdot AC.$$

因此 $f(P)=PA\cdot BC+PC\cdot AB+PD\cdot CA$

$$\geq PB\cdot CA+PD\cdot CA=(PB+PD)\cdot CA.$$



答一图 1

因为上面不等式当且仅当 P,A,B,C 顺次共圆时取等号，因此当且仅当 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆且在 AC 上时，

$$f(P)=(PB+PD)\cdot CA.\qquad\cdots 10\text{ 分}$$

又因 $PB+PD\geq BD$，此不等式当且仅当 B,P,D 共线且 P 在 BD 上时取等号．因此当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆与 BD 的交点时，$f(P)$ 取最小值 $f(P)_{\min}=AC\cdot BD$.

故当 $f(P)$ 达最小值时，P,A,B,C 四点共圆.　…20 分

（Ⅱ）记 $\angle ECB=\alpha$，则 $\angle ECA=2\alpha$，由正弦定理有 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而

$\sqrt{3}\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha$，即 $\sqrt{3}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha$，所以

$$3\sqrt{3}-4\sqrt{3}(1-\cos^2\alpha)-4\cos\alpha=0,$$

整理得 $4\sqrt{3}\cos^2\alpha-4\cos\alpha-\sqrt{3}=0$，　…30 分

解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$（舍去），

故 $\alpha=30^\circ$，$\angle ACE=60^\circ$.

由已知 $\dfrac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1=\dfrac{\sin\left(\angle EAC-30^0\right)}{\sin\angle EAC}$，有 $\sin(\angle EAC-30^\circ)=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，即

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC-\dfrac{1}{2}\cos\angle EAC=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，整理得 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC=\dfrac{1}{2}\cos\angle EAC$，

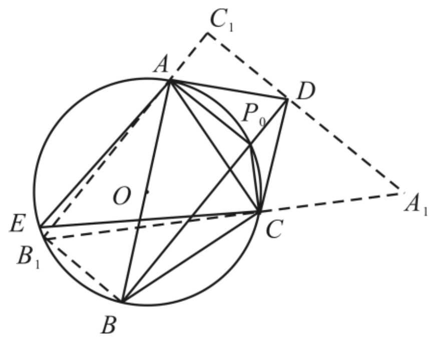
故 $\tan\angle EAC=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，可得 $\angle EAC=75^\circ$， …40 分

从而 $\angle E=45^\circ$，$\angle DAC=\angle DCA=\angle E=45^\circ$，$\Delta ADC$为等腰直角三角形．因 $AC=\sqrt{2}$，则 $CD=1$.

又 ΔABC也是等腰直角三角形，故 $BC=\sqrt{2}$，$BD^2=1+2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cos135^\circ=5$，$BD=\sqrt{5}$.

故 $f(P)_{\min}=BD\cdot AC=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$. …50 分

[解法二] （Ⅰ）如答一图 2，连接 BD 交 ΔABC的外接圆 O 于 P_0 点（因为 D 在⊙ O 外，故 P_0 在 BD 上）.



答一图 2

过 A,C,D分别作 P_0A,P_0C,P_0D的垂线，两两相交得 $\Delta A_1B_1C_1$，易知 P_0 在 ΔACD内，从而在 $\Delta A_1B_1C_1$内，记 ΔABC 之三内角分别为 x,y,z，则 $\angle AP_0C=180^\circ-y=z+x$，又因 $B_1C_1\perp P_0A$，$B_1A_1\perp P_0C$，得 $\angle B_1=y$，同理有 $\angle A_1=x$，$\angle C_1=z$，所以 $\Delta A_1B_1C_1\backsim\Delta ABC$. …10 分

设 $B_1C_1=\lambda BC$，$C_1A_1=\lambda CA$，$A_1B_1=\lambda AB$，则对平面上任意点 M，有

$$
\begin{aligned}
\lambda f(P_0)&=\lambda(P_0A\cdot BC+P_0D\cdot CA+P_0C\cdot AB)\\
&=P_0A\cdot B_1C_1+P_0D\cdot C_1A_1+P_0C\cdot A_1B_1\\
&=2S_{\Delta A_1B_1C_1}\\
&\le MA\cdot B_1C_1+MD\cdot C_1A_1+MC\cdot A_1B_1\\
&=\lambda(MA\cdot BC+MD\cdot CA+MC\cdot AB)\\
&=\lambda f(M),
\end{aligned}
$$

从而 $f(P_0)\le f(M)$.

由 M 点的任意性，知 P_0 点是使 $f(P)$ 达最小值的点.

由点 P_0 在⊙ O 上，故 P_0,A,B,C四点共圆. …20 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），$f(P)$ 的最小值

$$f(P_0)=\frac{2}{\lambda}S_{\Delta A_1B_1C_1}$$

$$=2\lambda S_{\triangle ABC},$$

记 $\angle ECB=\alpha$，则 $\angle ECA=2\alpha$，由正弦定理有 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sin2\alpha}{\sin3\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\sqrt{3}\sin3\alpha=2\sin2\alpha$，

即 $\sqrt{3}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=4\sin\alpha\cos\alpha$，所以

$$\sqrt{3}[3-4(1-\cos^2\alpha)]=4\cos\alpha,$$

整理得 $4\sqrt{3}\cos^2\alpha-4\cos\alpha-\sqrt{3}=0$， …30 分

解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$（舍去），

故 $\alpha=30^\circ$，$\angle ACE=60^\circ$.

由已知 $\dfrac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1=\dfrac{\sin(\angle EAC-30^0)}{\sin\angle EAC}$，有 $\sin(\angle EAC-30^\circ)=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，即

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC-\dfrac{1}{2}\cos\angle EAC=(\sqrt{3}-1)\sin\angle EAC$，整理得 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC=\dfrac{1}{2}\cos\angle EAC$，

故 $\tan\angle EAC=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，可得 $\angle EAC=75^\circ$， …40 分

所以 $\angle E=45^\circ$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AC=\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=1$，因为 $\angle AB_1C=45^\circ$，B_1 点在⊙ O 上，$\angle AB_1B=90^\circ$，所以 B_1BDC_1 为矩形，$B_1C_1=BD=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\cos135^\circ}=\sqrt{5}$，

故 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，所以 $f(P)_{\min}=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot1=\sqrt{10}$. …50 分

[解法三] （Ⅰ）引进复平面，仍用 A,B,C 等代表 A,B,C 所对应的复数.

由三角形不等式，对于复数 z_1,z_2，有

$$|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|,$$

当且仅当 z_1 与 z_2（复向量）同向时取等号.

有 $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|$，

所以 $|(A-P)(C-B)|+|(C-P)(B-A)|$

$$\ge|(A-P)(C-B)+(C-P)(B-A)| \quad (1)$$

$$=|-PC-AB+CB+PA|$$

$$=|(B-P)(C-A)|=|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|,$$

从而 $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{CA}|$

$$\ge|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{CA}|$$

$=(|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PD}|)\cdot|\overrightarrow{AC}|$

$\geq|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$. （2） …10 分

（1）式取等号的条件是

复数 $(A-P)(C-B)$ 与 $(C-P)(B-A)$

同向，故存在实数 $\lambda>0$，使得

$$(A-P)(C-B)=\lambda(B-A)(C-P),$$

$$\frac{A-P}{C-P}=\lambda\frac{B-A}{C-B},$$

所以 $\arg\left(\frac{A-P}{C-P}\right)=\arg\left(\frac{B-A}{C-B}\right)$,

向量 $\overline{PC}$ 旋转到 $\overline{PA}$ 所成的角等于 $\overline{BC}$ 旋转到 $\overline{AB}$ 所成的角，

从而 P,A,B,C 四点共圆.

（2）式取等号的条件显然为 B,P,D 共线且 P 在 BD 上.

故当 $f(P)$ 达最小值时 P 点在 ΔABC 之外接圆上，P,A,B,C 四点共圆. …20 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(P)_{\min}=|BD|\cdot|AC|$.

以下同解法一.

分析：以上三种解法中，对于第一问，解法（1）较为常见，因为托勒密定理是大家所熟知的，而这个问题又十分明显的与四边形及其边角关系相关。但第二、三种证法更加本质，甚至能够证明托勒密定理本身。从“抢分”的角度考虑，我们建议使用第一种证法，尽量运用现有的定理、结论，简化证明过程，缩短“构造”所用的时间。

对于第二问，两种解法都应用了三角函数。三角函数是介于纯平面几何方法与纯解析几何方法中间的“桥梁”，它既保持了平面几何法注重几何直观和定理的应用的优点，又继承了解析几何法运用代数方法直接求解，无需复杂的构造的优点；三角函数法克服了平面几何法添加辅助线多、构造复杂，图形眼花缭乱，关系不易找到的缺点，又避免了解析几何法运算复杂的缺点。这样，三角函数方法在解决平面几何题目中，有着得天独厚的优势。

抢分攻略：通过多个定理的试探，发现托勒密定理恰好适合第一问。对于第二问，若初看没有思路，可以先画一个标准的图形，由于原题中的图形太不标准，迷惑人心。马上可以发现，其中存在一个直角，可以运用三角函数或勾股定理，问题迎刃而解。

二、（数论问题）（本题满分 50 分）

设 $f(x)$ 是周期函数，T 和 1 是 $f(x)$ 的周期且 $0<T<1$. 证明：

（Ⅰ）若 T 为有理数，则存在素数 p，使 $\frac{1}{p}$ 是 $f(x)$ 的周期；

（Ⅱ）若 T 为无理数，则存在各项均为无理数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $1>a_n>a_{n+1}>0$

$(n=1,2,\cdots)$，且每个 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $f(x)$ 的周期.

[证]　（Ⅰ）若 T 是有理数，则存在正整数 m,n 使得 $T=\dfrac{n}{m}$ 且 $(m,n)=1$，从而存在整数 a,b，使得

$$na+mb=1.$$

于是

$$\frac{1}{m}=\frac{na+mb}{m}=aT+b=aT+b\cdot 1$$

是 $f(x)$ 的周期. …10 分

又因 $0<T<1$，从而 $m\geq 2$. 设 p 是 m 的素因子，则 $m=pm'$，$m'\in\mathbf{N}^*$，从而

$$\frac{1}{p}=m'\cdot\frac{1}{m}$$

是 $f(x)$ 的周期. …20 分

（Ⅱ）若 T 是无理数，令

$$a_1=1-\left[\frac{1}{T}\right]T,$$

则 $0<a_1<1$，且 a_1 是无理数，令

$$a_2=1-\left[\frac{1}{a_1}\right]a_1,$$

……

$$a_{n+1}=1-\left[\frac{1}{a_n}\right]a_n,$$

……. …30 分

由数学归纳法易知 a_n 均为无理数且 $0<a_n<1$. 又 $\dfrac{1}{a_n}-\left[\dfrac{1}{a_n}\right]<1$，故 $1<a_n+\left[\dfrac{1}{a_n}\right]a_n$，

即 $a_{n+1}=1-\left[\dfrac{1}{a_n}\right]a_n<a_n$. 因此 $\{a_n\}$ 是递减数列. …40 分

最后证：每个 a_n 是 $f(x)$ 的周期. 事实上，因 1 和 T 是 $f(x)$ 的周期，故 $a_1=1-\left[\dfrac{1}{T}\right]T$ 亦是 $f(x)$ 的周期. 假设 a_k 是 $f(x)$ 的周期，则 $a_{k+1}=1-\left[\dfrac{1}{a_k}\right]a_k$ 也是 $f(x)$ 的周期. 由数学归纳法，已证得 a_n 均是 $f(x)$ 的周期. …50 分

分析：本题是一个数论问题，巧妙的运用了有关“周期”的知识，将函数问题与数论问题综合在一起。核心的一条定理是，如果 A、B 均为函数 f(x)的周期，则 A、B 的线性组合

（即 xA+yB,x,y∈ Z)也是 f(x)的周期。在证明过程中，对于第一问，裴蜀定理的应用是关键；对于第二问，乘积取整的反复迭代是关键。这里特别提到运算 $a_n=[n\alpha]$,其中 α 是正无理数。这种运算是一种著名的变形技巧，在多种数列问题、数论问题的构造中有重要应用。

例如，设 α,β 是正无理数，且满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. 设 $a_n=[n\alpha], b_n=[n\beta]$,则这两个数列恰好不重不漏的覆盖整个正整数集。

同样的，若 α 为无理数，设 $a_n=[n(1+\alpha)], b_n=[n(1+\alpha^{-1})]$，这两个数列也能恰好覆盖全体正整数。

又如，设 *m,n* 为正整数，对任意实数 *α,β* 有 $[(m+n)\alpha]+[(m+n)\beta]\geq[m\alpha]+[n\beta]+[m\alpha+n\beta]$ 成立的充要条件是 *m*=*n*. 这与第 14 届 IMO 的一道试题（变形后）$[2\alpha]+[2\beta]\geq[\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta]$ 相关。

在本题的解答中，要注意不能假设最小正周期。因为对于函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$，可以证明所有有理数都是其周期，而所有无理数都不是其周期。这样，由于最小的有理数不存在，最小正周期也就不存在。

抢分攻略：首先考虑，能否构造这样的函数满足题意。当发现困难时，不妨考虑，一个有理数与一个无理数同时为周期，则他们的和、差都是周期，而其中一个已知周期是 1，使我们想起高斯函数，因为整数部分可以略去，而高斯函数又恰恰适用于实数的处理，有很多巧妙的性质。那么构造数列{nα}，再加以适当变形即可。不一定采用上述题解中的构造，只要将数列产生即可。一种常见的方法是取一个整数 n，使其与 α 乘积的小数部分比 α 小。由于 α 是无理数，这样的 n 一定存在。则取这样的小数部分，就是 n 个周期 α，减去[nα]个周期 1 的结果，仍是函数的周期，这样构造出一个无穷递减数列。但是，无论如何抢分，周期的“线性组合”定理是一定要想到的，笔者就是因为没有想到这一方面而未作出此题。

三、（代数问题）（本题满分 50 分）

设 $a_k>0$，$k=1,2,\cdots,2008$. 证明：当且仅当 $\sum_{k=1}^{2008}a_k>1$ 时，存在数列 $\{x_n\}$ 满足以下条件：

（i）$0=x_0<x_n<x_{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$；

（ii）$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在；

（iii）$x_n-x_{n-1}=\sum_{k=1}^{2008}a_kx_{n+k}-\sum_{k=0}^{2007}a_{k+1}x_{n+k}$，$n=1,2,3,\cdots$.

[证] 必要性：假设存在 $\{x_n\}$ 满足（i），（ii），（iii）. 注意到（iii）中式子可化为

$$x_n - x_{n+1} = \sum_{k=1}^{2008} a_k (x_{n+k} - x_{n+k+1}), \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

其中 $x_0 = 0$．

将上式从第 1 项加到第 n 项，并注意到 $x_0 = 0$ 得

$$x_n = a_1(x_{n+1} - x_1) + a_2(x_{n+2} - x_2) + \cdots + a_{2008}(x_{n+2008} - x_{2008}).$$ …10 分

由（ii）可设 $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，将上式取极限得

$$b = a_1(b - x_1) + a_2(b - x_2) + \cdots + a_{2008}(b - x_{2008})$$

$$= b \cdot \sum_{k=1}^{2008} a_k - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{2008} x_{2008})$$

$$< b \cdot \sum_{k=1}^{2008} a_k,$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{2008} a_k > 1$． …20 分

充分性：假设 $\sum\limits_{k=1}^{2008} a_k > 1$．定义多项式函数如下：

$$f(s) = -1 + \sum_{k=1}^{2008} a_k s^k, \quad s \in [0,1],$$

则 $f(s)$ 在[0,1]上是递增函数，且

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = -1 + \sum_{k=1}^{2008} a_k > 0.$$

因此方程 $f(s) = 0$ 在[0,1]内有唯一的根 $s = s_0$，且 $0 < s_0 < 1$，即 $f(s_0) = 0$． …30 分

下取数列 $\{x_n\}$ 为 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} s_0^k$，$n = 1, 2, \cdots$，则明显地 $\{x_n\}$ 满足题设条件（ i ），且

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} s_0^k = \frac{s_0 - s_0^{n+1}}{1 - s_0}.$$

因 $0 < s_0 < 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_0^{n+1} = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_0 - s_0^{n+1}}{1 - s_0} = \frac{s_0}{1 - s_0}$，即 $\{x_n\}$ 的极限存在，满足（ii）. …40 分

最后验证 $\{x_n\}$ 满足（iii），因 $f(s_0) = 0$，即 $\sum\limits_{k=1}^{2008} a_k s_0^k = 1$，从而

$$x_n - x_{n+1} = -s_0^{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{2008} a_k s_0^k\right)(-s_0^{n+1}) = \sum_{k=1}^{2008} -a_k s_0^{n+k+1} = \sum_{k=1}^{2008} a_k (x_{n+k} - x_{n+k+1}).$$

综上，存在数列 $\{x_n\}$ 满足（ i ），（ii），（iii）. …50 分

分析：在本题中，第一问关键在于和式变换，采用“逐差法”，这是一种类似阿贝尔变

换的手段；第二问解题的关键在于构造数列 $x_n=\sum_{k=1}^{n} s_0{}^k$，并使用极限的知识求解。

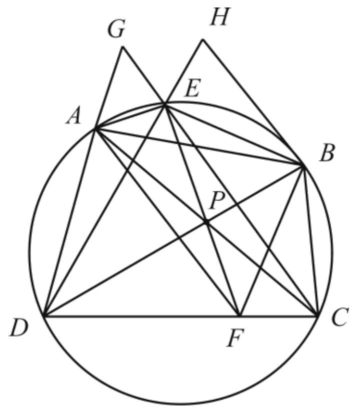
抢分攻略：观察条件中最重要的(iii)式，发现有公因式可以提出，故首先对其进行变形。发现可以运用错位相减法消项，于是对其进行求和，只剩下 x_n 的表达式。由于涉及极限问题，对其取极限，得到一个放缩关系，从而证明必要性。对于充分性，由于需要逼近所需极限，故考虑使用无穷递缩等比数列，是最为简单的方法。由于涉及到求和，为了方便消项，我们采用求和的办法，将每个元素设为前若干项的和，这也是解决数列问题的重要方法。求极限发现，这个表达式相当“和谐”。然后进行数学推导，问题不再困难。

10.3　2008 全国联赛 B 卷

2008 联赛加试 B 卷，是少数省市的竞赛试卷，也是 A 卷的备用试卷。相比 A 卷而言，B 卷的创新性略显逊色，题目趋向于传统。

一、（平面几何）（本题满分 50 分）

如题一图，$ABCD$是圆内接四边形．AC 与 BD 的交点为 P，E 是弧AB 上一点，连接EP 并延长交DC 于点F，点G,H 分别在CE，DE 的延长线上，满足 $\angle FAG=\angle EFA$，$\angle FBH=\angle BFE$，求证：C,D,G,H四点共圆．



题一图

[证]　由已知条件知

[illegible]．

又　　[illegible]，

所以　　[illegible]，

从而A,F,C,G四点共圆，此圆记为Γ_1．

同理可证：B,F,D,H四点共圆，此圆记为Γ_2．

点E 在圆Γ_1，Γ_2 内．延长FE 与圆Γ_1 相交于点I，则

[illegible]，

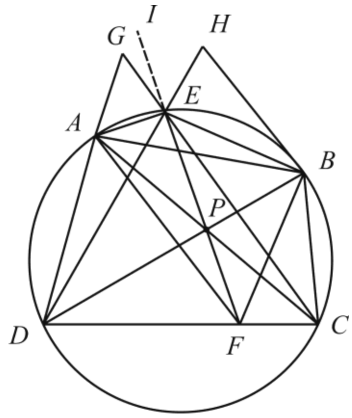
故B,F,D,I四点共圆．

所以I 在ΔBFD的外接圆上，故I 在Γ_2 上．

再用相交弦定理：

[illegible]，

故C,D,G,H四点共圆．



答一图

分析：本题是一道标准的平面几何问题。与 2007 年联赛第一题类似，也是抓住“四点共圆”这个问题做文章。

抢分攻略：采用“试探法”，由于图形并不复杂，可以将圆内可能的角度关系全部列出，推导可发现两组角互补，四点共圆成立。然后列出可能的边的关系，发现圆幂定理可用，故推导相关关系，发现有一组四点共圆，然后问题简便。这也是“铺天盖地绝地反击”一招的应用。

二、（数论问题）（本题满分 50 分）

求满足下列关系式组

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z^2, \\ z<y\le z+50, \end{cases}$$

的正整数解组(x,y,z)的个数.

[解] 令$r=y-z$，由条件知$0<r\le 50$，方程化为

$$x^2+(z+r)^2=2z^2，即\ x^2+2zr+r^2=z^2. \qquad (1)$$

因$y-z=r>0$，故$z^2=x^2+y^2-z^2>x^2$，从而$z>x$.

设$p=z-x>0$. 因此（1）化为

$$-2zp+p^2+2zr+r^2=0. \qquad (2)$$

下分r为奇偶讨论，

（ⅰ）当r为奇数时，由（2）知p为奇数.

令$r=2r_1+1$，$p=2p_1+1$，代入（2）得

$$2\left(p_1^2+p_1+r_1^2+r_1+zr_1-zp_1\right)=-1. \qquad (3)$$

（3）式明显无整数解. 故当r为奇数时，原方程无正整数解.

（ⅱ）当r为偶数时，设$r=2r_1$，由方程（2）知p也为偶数. 从而可设$p=2p_1$，代入（2）化简得

$$p_1^2-zp_1+zr_1+r_1^2=0. \qquad (4)$$

由（4）式有$z(p_1-r_1)=p_1^2+r_1^2>0$，故$p_1>r_1$，从而可设$p_1=r_1+a$，则（4）可化为$(r_1+a)^2-za+r_1^2=0$，

$$2r_1^2+2ar_1-za+a^2=0. \qquad (5)$$

因$z=\dfrac{2r_1^2}{a}+2r_1+a$为整数，故$a\,|\,2r_1^2$.

又$z>z-x=2p_1=2(r_1+a)$，因此

$(r_1+a)^2+r_1^2=za>2(r_1+a)a$，得$a^2<2r_1^2$，

$a<\sqrt{2}r_1$.

因此，对给定的 $r_1=1,2,\cdots,25$，解的个数恰是满足条件 $a<\sqrt{2}r_1$ 的 $2r_1^2$ 的正因数 a 的个数 $N(r_1)$．因 $2r_1^2$ 不是完全平方数，从而 $N(r_1)$ 为 $2r_1^2$ 的正因数的个数 $\sigma(2r_1^2)$ 的一半．即

$N(r_1)=\sigma(2r_1^2)/2$.

由题设条件，$1\le r_1\le 25$．而

25 以内有质数 9 个：2，3，5，7，11，13，17，19，23．将 25 以内的数分为以下八组：:

$A_1=\{2^0,2^1,2^2,2^3,2^4\}$,

$A_2=\{2\times3,2\times5,2\times7,2\times11\}$,

$A_3=\{2^2\times3,2^2\times5\}$,

$A_4=\{2^3\times3\}$,

$A_5=\{2\times3^2\}$,

$B_1=\{3,5,7,11,13,17,19,23\}$,

$B_2=\{3^2,5^2\}$,

$B_3=\{3\times5,3\times7\}$,

从而易知

$N(A_1)=N(2^0)+N(2^1)+N(2^2)+N(2^3)+N(2^4)=1+2+3+4+5=15$,

$N(A_2)=4N(2\times3)=4\times6=24$,

$N(A_3)=9\times2=18$,

$N(A_4)=12$,

$N(A_5)=10$,

$N(B_1)=3\times8=24$,

$N(B_2)=5\times2=10$,

$N(B_3)=9\times2=18$,

将以上数相加，共 131 个．因此解的个数共 131．

分析：本题是一道较为地道的数论问题。

抢分攻略：首先进行试验，发现与平方数和质数有关；然后考虑理论证明。首先采用代入消元法，将方程组变为一个二次方程；然后利用奇偶性，找出共性；然后利用因数的性质，分类解决。构造集合时用到一个重要方法，就是按照所含的质因数分组，先独立出质数的方幂，然后将最高次幂相同的归为同一集合。不含此质因数的，按照更大的质因数分类。最后，所有质数为一类。这样，由于首先按 2 分类，与 2 的方幂有关，方便运用奇偶性、二进制，构造出集合的个数也往往便于利用抽屉原理。

B 卷加试第三题同 A 卷加试第三题。

10.4 2009 联赛原创模拟试题

第 一 试

一. 填空题(每小题 7 分, 共 56 分)

1. 已知 a,b,c,d 为正实数, 则函数 $f(x)=\sqrt{(x+a)^2+b^2}+\sqrt{(x+c)^2+d^2}$ 的最小值为_________.

2. 在 $n\times n$ 的棋盘上放有 n^2 个象, 每个方格里有一个象. 将这些象分成 m 类, 使同一类中的象都不在一条斜线上. 则 m 的最小值为________.

3. 面积为 1 的凸四边形的四边与两条对角线的长度之和的最小值为_________.

4. 正四棱锥内接于半径为 R 的球, 外切于半径为 r 的球. 则 $\dfrac{R}{r}$ 的最小值为_______.

5. 甲乙二人轮流投掷一枚均匀硬币, 甲先投, 先累计投出 3 次正面者获胜. 则甲的获胜概率为_________.

6. 多项式 $P(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+5x^6+4x^7+3x^8+2x^9+x^{10}$ 在实数范围内分解因式得到的项数为____.

7. 某校自主招生共有 n 个学科, 学生 A, B, C 三人参加, 在每个学科中, 第一, 二, 三名分别得 p_1,p_2,p_3 分, 其中 $p_1>p_2>p_3$ 且为正整数. 最后 A 得 22 分, B 和 C 均得 9 分. 已知 B 在数学中取得第一, 则得到第二最多的人是________.

8. 正整数 n 满足 $2009<n<3009$, 且 n 的所有奇约数之和为 1024, 则 $n=$_____.

二. 解答题(共 44 分)

9. (14 分) 设双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的中心为 O. 任一半径为 r 的圆交双曲线于 P,Q,R,S 四点. 求证: $OP^2+OQ^2+OR^2+OS^2=4r^2$.

10. (15 分) 三角形 ABC 的三边长分别为 a,b,c, 三边上的高线长分别为 h_a,h_b,h_c, 内接圆半径为 r, 实数 $0<\lambda\le 2$, 整数 $n\ge 0$. 求证:

$$\frac{a^n}{h_a-\lambda r}+\frac{b^n}{h_b-\lambda r}+\frac{c^n}{h_c-\lambda r}$$
$$\ge\left(\frac{2}{3}\right)^n s^n\cdot\frac{3}{(3-\lambda)r}.$$

11. (15 分) 令 f 是一个定义在实数集上的严格递增函数. 对任意实数 x 和正数 t, 定义

$$g(x,t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)}.$$

对于所有 $0<t\le|x|$ 或 $x=0,t>0$, 不等式 $\dfrac{1}{2}<g(x,t)<2$ 都成立. 求证: 对于所有的实数 x 和正数 t, $\dfrac{1}{14}<g(x,t)<14$.

第 二 试

1. (50 分) 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 边 BA,CD 相交于点 P, 边 AD,BC 相交于点 Q, 对角线 AC,BD 相交于点 M. 求证: O 是$\triangle MPQ$ 的垂心.

2. (50 分) 给定正整数 $a_1\ge a_2\ge a_3$, 令 $N(a_1,a_2,a_3)$ 为方程 $\dfrac{a_1}{x_1}+\dfrac{a_2}{x_2}+\dfrac{a_3}{x_3}=1$ 的正整数解 (x_1,x_2,x_3) 的个数. 证明 $N(a_1,a_2,a_3)\le 6a_1a_2(3+\ln(2a_1))$.

3. (50 分) 求最小的非负整数 n, 使得存在非常数函数 $f:Z\to[0,+\infty)$, 满足

(1) $f(xy)=f(x)f(y)$

(2) 对任意整数 x,y, $2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\in\{0,1,...,n\}$

对这个最小的 n, 求出所有满足上述条件的函数.

4. (50 分) 设集合 $A_1,A_2,...,B_1,B_2,...$ 满足 $A_1=\varnothing,B_1=\{0\}$, 且对任意正整数 n, $A_{n+1}=\{x+1\,|\,x\in B_n\}$, $B_{n+1}=A_n\cup B_n-A_n\cap B_n$. 求出所有使得 $B_n=\{0\}$ 的正整数 n.

参 考 答 案

第 一 试

一. 填空题

1. $\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}$.

$f(x)$ 可看作平面直角坐标系内 $A(x,0)$ 点与点 $B(-a,b)$, 点 $(-c,d)$ 距离之和, 若求 $f(x)$ 最小值，即求 $AB+AC$ 最小值, 作 C 关于 X 轴的对称点 $C'(-c,-d)$, 此时 $BC'^2=(a-c)^2+(b+d)^2$.

取 A 点位于 BC' 与 X 轴的交点处, 若此时 $AB+AC=BC'$ 不为最小, 则有点 $A'(x',0)$ 使得 $A'B+A'C<B'C$, 此与三角形两边之和大于第三边矛盾, 故 $f(x)$ 最小值为 BC'.

2. n.

将棋盘黑白相间染色.

若 n 为偶数, 两条对角线一条全是黑格, 另一条全是白格. 在同一条对角线上的 n 个黑(白)象必须属于不同的类, 因此至少需要 n 类.

另一方面, 将同一行的(黑或白)象算作一类, 共分为 n 类, 每一类中的两只象不在同一条斜线上, 符合题意.

如果 n 是奇数, 不妨设棋盘的四个角为黑格, 则两条对角线都由 n 个黑格组成, 而全由白格组成的斜线至多有 $n-1$ 个白格. 因此至少需要 n 类.

再将同一行的黑象算作一类, 黑象至少分成了 n 类. 将第 n 行的白象与第一行的白象算作一类, 其余各行的白象自成一类, 共分为 $n-1$ 类, 总类数为 n, 符合题意.

【抢分】将每行的象看做一类，则共有 n 类。而 $n-1$ 类容易看出是不行的。

3. $4+2\sqrt{2}$.

设 AC, BD 交于点 O, 设 $AO=e,OC=f$, $OB=g,OD=h$, 设 $\angle AOB=\alpha$, 则 $1=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)\sin\alpha\le\frac{1}{2}(e+f)(g+h)\le\frac{1}{2}(\frac{e+f+g+h}{2})^2$, 即对角线长度之和 $e+f+g+h\ge 2\sqrt{2}$.

又因为

$$2=2S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}bc\sin B$$
$$+\frac{1}{2}cd\sin C+\frac{1}{2}da\sin D$$
$$\le\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\le\frac{1}{2}(\frac{a+b+c+d}{2})^2$$

故周长 $a+b+c+d\ge 4$.

综上, 四边与两对角线之和 $\ge 4+2\sqrt{2}$.

【抢分】考虑特殊情况，即四边形为正方形时。

4. $\sqrt{2}+1$.

设正四棱柱 $S-ABCD$ 的底面中心为 O, 底面边长为 a, 它的外接球球心为 O_2, 内切球球心为 O_1, 由对称性知 O_1,O_2 必在 SO 上, 且 $SO\perp$ 底面 $ABCD$.

作 $O_1F\perp SBC$ 于 F，直线 SF 比过 BC 中点 E，记 $SO=h,\angle SEO=\alpha$，易知 $r=O_1F=O_1O=\frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$，$O_2O=h-R$，$OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

由 $O_2B^2=O_2O^2+OB^2$ 得 $R=\frac{2h^2+a^2}{4h}$，由于 $h=\frac{a}{2}\tan\alpha$，所以 $R=\frac{a(\tan^2\alpha+2)}{4\tan\alpha}$.

令 $t=\tan^2\frac{\alpha}{2}$，则 $y=\frac{R}{r}=\frac{\tan^2\alpha+2}{2\tan\alpha}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+t^2}{2t(1-t)}$.

关于 t 的方程 $(2y+1)t^2-2yt+1=0$ 有实数根，故判别式 $\Delta=4y^2-8y-4\geq 0$，注意 $y>0$，解得 $\frac{R}{r}=y\geq\sqrt{2}+1$.

5. $\frac{46}{81}$.

定义甲乙轮流投掷，甲先投，甲投出 m 次正面朝上获胜，乙投出 n 次正面向上获胜，此时甲获胜的概率为 $P(m,n)$.

显然，$P(0,i)=1,i=1,2,\ldots$，$P(i,0)=0,i=1,2,\ldots$.

一般的，当 $m\in N^+,n\in N^+$ 时，有

$$P(m,n)=\frac{1}{4}(P(m,n)+P(m-1,n)+P(m,n-1)+P(m-1,n-1))$$

化简得 $P(m,n)=\frac{1}{3}(P(m-1,n)+P(m,n-1)+P(m-1,n-1))$

由上述递推关系，可得 $P(1,1)=\frac{2}{3}$，$P(2,2)=\frac{16}{27}$，$P(3,3)=\frac{46}{81}$.

6. 6.

$P(x)=(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2$.

【分析】如何分解此类因式？首先找到多项式的根，发现-1 是其一根，故 x+1 为因式；进而发现 x+1 因式还有一个。此时没有一次因式，从最简单的二次因式 x^2+x+1 开始试验，即可完成分解。更普遍的分解方法是复数方法。

7. C.

考虑三个人的总分，有方程：

M(p1+p2+p3)=22+9+9=40, ①

又 p1+p2+p3≥1+2+3=6, ②

∴6M≤M(p1+p2+p3)=40，从而 M≤6.

显然 M≥2，又 M|40，故 M 可取 2,4,5.

若 M=2，又 B 数学第一，但总分仅 9 分，故必有：9≥p1+p3,∴≤8，这样 A 不可能得 22 分.

若 M=4，由 B 可知：9≥p1+3p3，又 p3≥1，所以 p1≤6,若 p1≤5，那么四科最多得 20 分，A 就不可能得 22 分，故 p1=6.

∵4（p1+p2+p3）=40,∴p2+p3=4.

故有：p2=3,p3=1,A 最多得三个第一，一个第二，一共得分 3×6+3=21＜22，矛盾.

若 M=5，这时由 5(p1+p2+p3)=40，得：p1+p2+p3=8.

若 p3≥2，则：p1+p2+p3≥4+3+2=9，矛盾，故 p3=1.

又 p1 必须大于或等于 5,否则,A 五科最高只能得 20 分,与题设矛盾,所以 p1≥5.

若 p1≥6，则 p2+p3≤2，这也与题设矛盾，∴p1=5，p2+p3=3，即 p2=2，p3=1.

A=22=4×5+2.故 A 得了四个第一，一个第二；

B=9=5+4×1，故 B 得了一个第一，四个第三；

C=9=4×2+1，故 C 得了四个第二，一个第三.

【抢分】可以直接试验几种可能的情况，猜出结论。

8. 2604.

设 $n=2^k p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$，其中 p_i 为不同的奇素数. 则 n 的奇约数之和为

$$\prod_{i=1}^{r}(1+p_i+\dots+p_i^{a_i})=\prod_{i=1}^{r}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}=2^{10}.$$

注意到 $1+p_i+\dots+p_i^{\alpha_i}$ 是 α_i+1 个奇素数之和. 由于和的乘积为 2 的次幂, 每个和必须是偶数. 因此, 每个 a_i 必须是奇数.

因为 $1+11+11^2+11^3>1024$，若 $p_i>11$，则 $a_i=1$，且 $1+p_i$ 必须是 2 的次幂, 且不大于 1024. 满足 $p_i\geq 11$ 的可能取值为 31 和 127（由于 5|255, 7|511, 3|1023）

若 $p_1<11$，则 $p_1=3,5,7$. 检查 $a_i=1,\ p_i=3$ 或 7. 因此对于所有的 $i, a_i=1$，故 p_i 的所有可能取值为 3, 7, 31, 127. 其中能够生成约数和 1024 的只有 $(1+3)(1+7)(1+31)$，此时 $n=651\cdot 2^k$；或 $(1+7)(1+127)$，此时 $n=889\cdot 2^k$. 又 $2009<n<3009$，因此 $n=651\cdot 2^2=2604.$

二. 解答题

9. 证明：设方程为 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$

的圆与双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的交点用极坐标记为 $(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)$，于是

$$\rho^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=a^2$$

即 $\cos 2\alpha=\dfrac{a^2}{\rho^2}$. ①

由圆的方程得 $(\rho\cos\alpha-c)^2+(\rho\sin\alpha-d)^2=r^2$，

即 $\rho^2-2\rho(c\cos\alpha+d\sin\alpha)=r^2-c^2-d^2.$

故

$$(\rho^2+c^2+d^2-r^2)^2=4\rho^2(c\cos\alpha+d\sin\alpha)^2=4\rho^2(c^2\cos^2\alpha+d^2\sin^2\alpha+cd\sin 2\alpha)$$

$$=4\rho^2(\frac{c^2}{2}(1+\frac{a^2}{\rho^2})+\frac{d^2}{2}(1-\frac{a^2}{\rho^2})$$

$$+cd\sin 2\alpha).$$

移项, 平方得

$$((\rho^2+c^2+d^2-r^2)^2-2(c^2+d^2)\rho^2$$

$$-2a^2(c^2-d^2))^2=16\rho^4c^2d^2\sin^2 2\alpha.$$

结合①式, 消去 α 得

$$(\rho^4-2r^2\rho^2+(c^2+d^2-r^2)^2$$

$$-2a^2(c^2-d^2))^2=16c^2d^2(\rho^4-a^4).$$

上式可看作关于 ρ^2 的 4 次方程, 而 OP^2, OQ^2, OR^2, OS^2 是它的四个根. 由于上式中 ρ^8 的系数为 1，ρ^6 的系数为 $-4r^2$，由韦达定理, $OP^2+OQ^2+OR^2+OS^2=4r^2$.

【分析】此题用直角坐标运算较繁，应用极坐标简化运算。

10. 证明：令 s 为三角形周长的一半, 由三角形面积知 $h_a=\dfrac{2rs}{a}, h_b=\dfrac{2rs}{b}, h_c=\dfrac{2rs}{c}$. 故

$$\frac{a^n}{h_a-\lambda r}=\frac{a^{n+1}}{r(2s-\lambda a)}\quad \frac{b^n}{h_b-\lambda r}=\frac{b^{n+1}}{r(2s-\lambda b)}\quad \frac{c^n}{h_c-\lambda r}=\frac{c^{n+1}}{r(2s-\lambda c)}$$

不妨设 $a\ge b\ge c$, 则 $a^n\ge b^n\ge c^n$. 故 $\frac{1}{2s-\lambda a}\ge\frac{1}{2s-\lambda b}\ge\frac{1}{2s-\lambda c}$.

由切比雪夫不等式, $\frac{a^{n+1}}{2s-\lambda a}+\frac{b^{n+1}}{2s-\lambda b}+\frac{c^{n+1}}{2s-\lambda c}$

$\ge\frac{1}{3}(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})$

$(\frac{1}{2s-\lambda a}+\frac{1}{2s-\lambda b}+\frac{1}{2s-\lambda c})$

而 $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}\ge(\frac{1}{3}(a+b+c))^{n+1}=(\frac{2}{3}s)^{n+1}$,

$\frac{1}{2s-\lambda a}+\frac{1}{2s-\lambda b}+\frac{1}{2s-\lambda c}\ge\frac{9}{6s-\lambda(a+b+c)}=\frac{9}{2s(3-\lambda)}$.

$\therefore\frac{a^{n+1}}{2s-\lambda a}+\frac{b^{n+1}}{2s-\lambda b}+\frac{c^{n+1}}{2s-\lambda c}\ge(\frac{2}{3})^n s^n\cdot\frac{3}{3-\lambda}$.

两侧同乘 $\frac{1}{r}$, 命题得证.

11. 证明:只需考虑 $t>|x|$ 的情形.

不妨设 $x>0$. 一方面, 令

$$a_1=f(-\frac{x+t}{2})-f(-(x+t)),\ a_2=f(0)-f(-\frac{x+t}{2}),\ a_3=f(\frac{x+t}{2})-f(0),$$

$$a_4=f(x+t)-f(\frac{x+t}{2}).$$

由于 $-(x+t)<x-t, x<\frac{1}{2}(x+t)$, 得到 $f(x)-f(x-t)\le a_1+a_2+a_3$.

又因为 $\frac{1}{2}<\frac{a_{j+1}}{a_j}<2$, 得到 $g(x,t)>\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3}>\frac{a_3/2}{4a_3+2a_3+a_3}=\frac{1}{14}$

另一方面, 令

$$b_1=f(0)-f(-\frac{x+t}{3}),\ b_2=f(\frac{x+t}{3})-f(0),\ b_3=f(\frac{2(x+t)}{3})-f(\frac{x+t}{3}),$$

$$b_4=f(x+t)-f(\frac{2(x+t)}{3}).$$

若 $t<2x$, 则 $x-t<-\frac{1}{3}(x+t)$, 因此 $f(x)-f(x-t)\ge b_1$.

若 $t\ge 2x$, 则 $\frac{1}{3}(x+t)\le x$, 因此 $f(x)-f(x-t)\ge b_2$.

由于 $\frac{1}{2}<\frac{b_{j+1}}{b_j}<2$, 得到

$g(x,t)<\frac{b_2+b_3+b_4}{\min\{b_1,b_2\}}<\frac{b_2+2b_2+4b_2}{b_2/2}$

$=14.$

综上, $\frac{1}{14}<g(x,t)<14$.

【分析】本题构造 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$ 的方法很巧妙。

第 二 试

1. 引理:设圆内接四边形 ABCD 的对边延长线交点为 P, Q, 则 $PQ^2=d(P)+d(Q)$, 其中 $d(P),d(Q)$ 分别代表 P, Q 对圆的幂, 即这点向圆所引切线长的平方.

证明:将 PQ^2 分为两部分, 分别为 P 对圆的幂和 Q 对圆的幂.

为此, 过点 P,A,D 作圆交 PQ 于 N. 则 $QN\cdot PQ=QD\cdot QA$ 为 Q 对⊙ O 的幂.

由于 $\angle PND=\angle BAD=\angle DCQ$, 故 N,D,C,Q 共圆. 从而 $PN\cdot PQ=PD\cdot PC$ 是 P 对⊙ O 的幂.

以上两式相加, 引理得证.

类似可证, $MP^2=d(P)+d(M)$, $MQ^2=d(Q)+d(M)$.

故 $MP^2-MQ^2=d(P)+d(M)-d(Q)-d(M)=d(P)-d(Q)$

$=(OP-R^2)-(OQ-R^2)$

$=OP^2-OQ^2$.

由勾股定理, 得 $OM\perp PQ$. 同理 $OP\perp MQ,OQ\perp MP$, 故 O 为 $\triangle MPQ$ 的垂心, 命题得证.

【分析】本题考查圆幂定理的应用，关键是将各线段表示成 P, Q, N 的圆幂。

2. 定义 N_{pqr} 为满足 $\frac{a_p}{x_p}\ge\frac{a_q}{x_q}\ge\frac{a_r}{x_r}$ 的解的个数, 其中 (p,q,r) 是(1, 2, 3)的 6 个排列之一. 下证 $N_{pqr}+N_{qpr}\le 2a_1a_2(3+\ln(2a_1))$.

首先, 由 $\frac{3a_p}{x_p}\ge\frac{a_p}{x_p}+\frac{a_q}{x_q}+\frac{a_r}{x_r}$ 和 $\frac{a_p}{x_p}<1$ 得 $a_p+1\le x_p\le 3a_p$.

类似的, 固定 x_p, 有 $\frac{2a_q}{x_q}\ge\frac{a_q}{x_q}+\frac{a_r}{x_r}=1-\frac{a_p}{x_p}$, $\frac{a_q}{x_q}\le\min\{\frac{a_p}{x_p},1-\frac{a_p}{x_p}\}$.

其中 $\max\{\frac{a_qx_p}{a_p},\frac{a_qx_p}{x_p-a_p}\}\le x_q\le\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}$.

若 $a_p+1\le x_p\le 2a_p$, x_q 至多有 $\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}+\frac{1}{2}$ 个可能的取值(因为在 x 与 $2x$ 之间有 $[2x]-[x]=[x+\frac{1}{2}]$ 个整数). 若 $2a_p+1\le x_p\le 3a_p$, 则至多有 $\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}-\frac{a_qx_p}{a_p}+1$ 个不同的取值.

若给定 x_p,x_q, 则 x_r 被唯一确定. 因此

$$N_{pqr}=\sum_{x_p=a_p+1}^{2a_p}(\frac{a_qx_p}{x_p-a_p}+\frac{1}{2})\quad=\frac{3a_p}{2}+a_q\cdot$$

$$+\sum_{x_p=2a_p+1}^{3a_p}(\frac{2a_qx_p}{x_p-a_p}-\frac{a_qx_p}{a_p}+1)\sum_{k=1}^{a_p}(\frac{k+a_p}{k}+\frac{2(k+2a_p)}{k+a_p}-\frac{k+2a_p}{a_p})$$

$$=\frac{3a_p}{2}+a_q\sum_{k=1}^{a_p}(1-\frac{k}{a_p}+a_p(\frac{1}{k}+\frac{2}{k+a_p}))=\frac{3a_p}{2}-\frac{a_q}{2}+a_pa_q(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{a_p}(\frac{1}{k}+\frac{2}{k+a_p}))$$

$$\le a_pa_q(\frac{3}{2a_q}-\frac{1}{2a_p}+\ln(2a_p)+\frac{5}{2}-\ln 2)$$

其中$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}+\frac{2}{k+n})\le \ln(2n)+2-\ln 2$, 这可以用数学归纳法证明.

因此,

$$N_{pqr}+N_{qpr}\le 2a_pa_q(1+\frac{1}{2}+\ln 2a_p$$
$$+2-\ln 2)<2a_1a_2(3+\ln(2a_1)).$$

故所有排列的个数$=3(N_{pqr}+N_{qpr})<6a_1a_2(3+\ln(2a_1))$, 命题得证.

【分析】这道不等式题并不常规，一是它与离散数学相结合，二是其中出现了对数函数 ln. 设出大小关系、固定变量计算另一个变量的取值范围、和式变换等技巧都是值得玩味的。对数函数与调和级数的关系是沟通离散与连续的一座桥梁，应当关注。

3. 引理 1: 如果n是一个正整数, 且$(a,n)=1$, 则存在整数$0<x,y\le\sqrt{n}$使得$xa\equiv\pm y(\bmod n)$.

证明: 对所有$0\le x,y\le[\sqrt{n}]$, 考虑数$xa-y$, 得到一个$([\sqrt{n}]+1)^2>n$个数的列表, 由抽屉原理, 必有两个数$\bmod n$同余. 设它们是ax_1-y_1,ax_2-y_2. 不妨设$x_1>x_2$（显然$x_1\ne x_2$）, 令$x=x_1-x_2, y=|y_1-y_2|$, 引理 1 得证.

引理 2: 任意形如$4k+1$的素数都可以写成a^2+b^2的形式.

证明: 考虑$n=(2k)!$. 由 Wilson 定理,

$$-1\equiv(p-1)!\equiv 1\cdot 2\cdots(\frac{p-1}{2})(p-\frac{p-1}{2})\cdots$$
$$(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(\frac{p-1}{2})!^2\equiv(2k)!^2(\bmod p)$$

故存在整数n使得$p\mid n^2+1$.

显然, $(p,n)=1$, 应用引理 1, 必存在$0<x,y<\sqrt{p}$（由于$\sqrt{p}\notin Z$）使得$p\mid n^2x^2-y^2$. 由于$p\mid n^2+1$, $p\mid x^2+y^2$, 又由于$0<x,y<\sqrt{p}$, 得到$p=x^2+y^2$, 引理 2 得证.

回到原题. 首先证明, 对$n=1$, 存在满足条件的函数.

令A,B分别表示形如$4k+1,4k+3$的素数集合. 对任意$p\in B$, 定义

$$f_p:Z\to Z,\ f_p(x)=\begin{cases}0, p\mid x\\ 1, p\nmid x\end{cases}$$

由定义, 显然f_p满足题意.

下面证明, 若f不是常函数, 则$n>0$. 不然, $2f(x^2+y^2)=f(x)+f(y)$, 令$y=0$, 有$2f^2(x)=2f(x^2+0^2)=f(x)+f(0)$. 再令$x=0$, 则$f^2(0)=f(0)$. 由于$f$不是常函数, 必有$f(0)=0$. 一般的, 对任意整数$x$, 有$2f^2(x)=f(x)$. 若存在一个$x$使得$f(x)=\frac{1}{2}$, 则$f^2(x^2)\ne 2f(x^2)$, 矛盾. 因此$n=1$是满足条件的最小值.

下面证明每个满足$n=1$的非常数函数一定是f_p形式的. 已经证明$f(0)=0$, 又因为$f^2(1)=f(1)$, 而f不是常数函数, 故$f(1)=1$. 对任意整数x, $2f^2(x)-f(x)=2f(x^2+0^2)-f(x)-f(0)\in\{0,1\}$. 因此$f(x)\in\{0,1\}$.

由于$f^2(-1)=f(1)=1$, $f(-1)\in[0,+\infty)$, 必有$f(-1)=1$, $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$. 因为$f(xy)=f(x)f(y)$, 对于任意素数p, 可以求出$f(p)$. 我们证明只有一个素数p满足$f(p)=0$.

由于 f 不是常数函数, 必存在一个素数 p, 使得 $f(p)=0$. 假设存在另一个素数 q, 使得 $f(q)=0$. 则 $2f(p^2+q^2)\in\{0,1\}$, 故 $f(p^2+q^2)=0$. 对于任意整数 a,b,

$$0=2f(a^2+b^2)f(p^2+q^2)$$
$$=2f((ap+bq)^2+(aq-bp)^2).$$

由于 $0\le f(x)+f(y)\le 2f(x^2+y^2)$, 必有 $f(ap+bq)=f(aq-bp)=0$, 矛盾. 因此, 恰有一个素数 p 使得 $f(p)=0$.

假设 $p=2$. 则对任意偶数 x, $f(x)=0$, 而对任意奇数 x,y, $2f(x^2+y^2)=0$. 则对任意奇数 x,y, $f(x)=f(y)=0$, 故 f 是常数函数, 矛盾.

因此 $p\in A\cup B$. 不妨设 $p\in A$. 由引理 2, 存在正整数 a,b 使得 $p=a^2+b^2$. 因此 $f(a)=f(b)=0$. 但 $\max\{a,b\}>1$, 存在一个素数 q 使得 $q\mid\max\{a,b\}$, $f(q)=0$. 不然, $f(\max\{a,b\})=1$, 矛盾.

显然, $q<p$, 我们找到两个不同的素数 p,q 使得 $f(p)=f(q)=0$, 这是不可能的. 一般的, $p\in B$, 且对 $x=kp,k\in Z$, $f(x)=0$. 对 $x\ne kp$, $f(x)=1$. 因此, 满足条件的函数必定是 f_p 形式的, 命题得证.

【分析】本题又是一道非常规题，将函数方程与数论结合。题中的引理是一条关于素数及平方和的重要定理，这里给出的是较为简单的一种证明。题设中要求的是值域元素的最小个数，但事实上要求肯定两个的情形。本题的巧妙之处在于，题中没有出现任何与“素数”“整除”相关的字眼，但解答中应用的却是素数的性质，其中的构造也是由整除性确定取值。这是全卷中最难的试题。

4. 我们证明当且仅当 n 是 2 的次幂时, $B_n=\{0\}$.

对于整数集 S, 令 $2S$ 表示集合 $\{2x\mid x\in S\}$, 令 $S+k$ 表示集合 $\{x+k\mid x\in S\}$, 其中 $k\in Z$.

首先证明 $n\ge 1$ 时 $0\notin A_n$. 由定义, A_1 成立. 由于 A_{n+1} 是 B_n 的元素加 1 得来的, 而 B_n 的元素非负, 故 A_{n+1} 中的所有元素均正. 由归纳法, 命题成立.

下面用数学归纳法证明 $n\ge 2$ 时下列命题成立.

(1) $A_{2n-1}=2A_n-1$

(2) $B_{2n-1}=A_{2n-1}\cup B_{2n}$

(3) $B_{2n}=2B_n$

(4) $1\in B_{2n-1}$

当 $n=2$ 时, 由于 $A_2=\{1\},B_2=\{0\}$, $A_3=\{1\},B_3=\{0,1\},A_4=\{1,2\},B_4=\{0\}$, 命题显然成立.

假设命题对 $n-1$ 成立. 即 $A_{2n-3}=2A_{n-1}-1$, $B_{2n-3}=A_{2n-3}\cup B_{2n-2}$

$B_{2n-2}=2B_{n-1}$, 且 $1\in B_{2n-3}$.

命题(1)成立, 由于

$$A_{2n-1}=B_{2n-2}+1=2B_n+1$$
$$=2(A_n-1)+1=2A_n-1.$$

下面证明(2). 由归纳假设,

$$A_{2n-2}=B_{2n-3}+1=(A_{2n-3}\cup B_{2n-2})+1$$
$$=((2A_{n-1}-1)\cup 2B_{n-1})+1$$
$$=2A_{n-1}\cup(2B_{n-1}+1).$$

由于

$B_{2n-2}=2B_{n-1}$, $B_{2n-1}=A_{2n-2}\cup B_{2n-2}-A_{2n-2}\cap B_{2n-2}$, $B_n=A_{n-1}\cup B_{n-1}-A_{n-1}\cap B_{n-1}$, 得到

$$\begin{aligned}&B_{2n-1}=2A_{n-1}\cup(2B_{n-1}+1)\cup 2B_{n-1}\\&-(2A_{n-1}\cup(2B_{n-1}+1))\cap 2B_{n-1}\\&=(2B_{n-1}+1)\cup 2A_{n-1}\cup 2B_{n-1}\\&-2A_{n-1}\cap 2B_{n-1}\\&=(2B_{n-1}+1)\cup 2B_n.\end{aligned}$$

其中第二步去掉集合$2B_{n-1}+1$是由于其元素均为奇数, 而集合$2B_{n-1}$的元素均为偶数.

又因为$A_{2n-1}=2B_{n-1}+1$, 故$B_{2n-1}=A_{2n-1}\cup 2B_n$. ①

下面证明(3). 根据定义, B_{2n}包含恰属于集合A_{2n-1}与B_{2n-1}之一的元素. 由①, B_{2n}不包含任何在A_{2n-1}中的元素.

另一方面, 由于$A_{2n-1}=2A_n-1$, 故A_{2n-1}的所有元素都是奇数, 它们与$2B_n$中的元素不可能相同. 因此, B_{2n}即为$2B_n$.

将(3)代入①, 得到(2).

下面证明(4). 由于$B_{2n-1}=(2B_{n-1}+1)\cup 2B_n$, 且 0 是每个$B_i$的元素, 故$1\in 2B_{n-1}+1$, 因此$1\in 2B_{n-1}$.

归纳结束. 现在证明满足$B_n=\{0\}$的正整数n必是 2 的次幂. 只需对$B_{2n}=2B_n$应用数学归纳法, 即可说明每个 2 的次幂具有上述性质. 另一方面, 若n不是 2 的次幂, 注意(4)中下标为大于 1 的奇数的集合都含有 1 的事实, 应用无穷递降法, 必有一个时刻出现奇数下标, 集合中含有 1, 而从此时出发, 集合中不可能只剩下 0. 命题得证.

【分析】本题首先通过对小规模数据的试验，发现结论；接着寻找2^n的内在关联，想到使用数学归纳法，但一定是与 2 的倍数相关。因此寻找A_n、B_n与A_{2n}、B_{2n}间的关系，发现结论（3），而这个结论的证明需要①，进而逆推到结论（1）。这样(1)(2)(3)形成了一个完整的螺旋归纳法体系。结论(4)是为了证明唯一性，很容易发现。解决本题需要反复利用已知条件，在集合之间进行转化，转化过程中注意明确方向，不要南辕北辙。螺旋归纳法是本题的一个亮点。

【注】本模拟试题首次发表于 2009 年 7 月《数之理》。由于误认为 2009 年联赛试题难度将增大，故命制了这样一套难度很大的试题，抢分也很难实现。现在看来，本卷二试题目适合作为 CMO 试题，本卷一试题目适合作为二试考题。

10.5　2009 全国高中联赛

第一试

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分．把答案填在横线上．

1.若函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，且 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f[f[f\cdots f}_{n}(x)]]$，则 $f^{(99)}(1)=$ $\underline{\dfrac{1}{10}}$．

函数的迭代问题，通过简单的试算寻找规律，属于信心题。作为填空题，不必用数学归纳法仔细推导关系式，只需计算出 $f^{(1)}(1),f^{(2)}(1),f^{(3)}(1)$ 等即可找到规律 $f^{(n)}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$。注意最终结果的化简，不要闹出 $\dfrac{1}{\sqrt{100}}$ 的笑话。

2.已知直线 L ：$x+y-9=0$ 和圆 M ：$2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$，点 A 在直线 L 上，B 、C 为圆 M 上两点，在△ABC 中，$\angle BAC=45°$，AB 过圆心 M ，则点 A 横坐标范围为 $\underline{[3,6]}$．

本题事实上是一道陈题，直线与圆的位置关系，解析几何中的经典问题。作为填空题，使用数形结合思想，容易发现与圆相切的极限位置，计算出此时 A 的横坐标即可。但如果盲目运用解析几何计算会误入歧途。

3.在坐标平面上有两个区域 M 和 N ，M 为：$\begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq x \\ y\leq 2-x \end{cases}$ N 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\leq x\leq t+1$ 所确定，t 的取值范围是 $0\leq t\leq 1$，设 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$，则 $f(t)=$ $\underline{-t^2+t+\dfrac{1}{2}}$．

平面区域的面积问题，线性规划的简单题。也是数形结合思想的应用。此类问题最好画图，不要空想。注意三角形面积需要乘 1/2。解出解析式后，最好代入特殊值（如 t=0, t=1）检验一下，以免出错。

4.使不等式 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}<a-2007\dfrac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为 $\underline{\quad 2009\quad}$．

函数单调性的简单考察。将离散调和级数求和问题与函数单调性结合，有新意。此题容易看出是年份题，若算出的结果不是 2009 应意识到算错了。

5.椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上任意两点 P ，Q ，若 $OP\perp OQ$ ，则乘积 $|OP|\cdot|OQ|$ 的最小值为 $\underline{\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$．

解析几何中的经典问题，正统做法是三角法和重要不等式。考试时可以代入椭圆的极端位置：P、Q 分别位于长短轴顶端；OP、OQ 分别与 x 轴对称成 45°，易发现极值。

这类问题的检查一般是“数量级”法（即多项式的次数），此题|OP|·|OQ|即为长度的二次方级，得到的结果中分子为四次方，分母为平方，次数正确。这类似物理学中的“量纲分析”，容易检查出多乘、少乘、忘记平方开方等运算错误。

6.若方程 $\lg kx=2\lg(x+1)$ 仅有一个实根，那么 k 的取值范围是 $\underline{k<0 \text{ 或 } k=4}$．

二次方程根的分布问题。注意判别式为零的情形，以及 lg 函数的定义域。很多选手丢掉了 $x<0$ 或 $x=4$ 之一。

7.一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和，最后一行仅有一个数，第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是 __101×2^{98}__（可以用指数表示）.

杨辉三角的变形，等差数列，数学归纳法。可以首先列出前几行，分别计算出其和，再寻找规律。作为填空题，直接代入 100 即可；若为解答题，应用数学归纳法。对于找规律的题，要注意初始条件，避免犯“加 1 减 1”的边界错误。

8.某车站每天 8∶00—9∶00，9∶00—10∶00 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间是相互独立的，其规律为

到站时刻	8∶10 9∶10	8∶30 9∶30	8∶50 9∶50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客 8∶20 到车站，则它候车时间的数学期望为__27__（精确到分）.

数学期望，属于新题型，很简单，但错误率很高，很多选手没有正确分析 8:10 到来一辆车的情况。如果 8:10 已经到来一辆车，则需要等到 9 点的三辆车；如果来的车是 8:30 或 8:50，则 9:00 之前一定能走。这个条件概率需要理解清楚。还有的选手没有注意“精确到分”的要求，写出了分数形式，这种低级错误应当避免。

【小结】今年联赛的填空题难度不大，关键在于细心认真，理解清楚题意。很多选手错两个甚至更多，都是因为考试时心情紧张，没有审清题意就开始计算，或者计算过程中忘记平方、忘记 2 倍、忘记开平方、移项忘记正负号等，犯低级错误。平时练习时，对于简单题千万不能麻痹大意，也许一些啼笑皆非的错误就发生在自己身上。

二、解答题：本大题共 3 小题，共 44 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

1.（本小题满分 14 分）设直线l：$y=kx+m$（其中k，m为整数）与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$交于不同两点$A$，$B$，与双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$交于不同两点$C$，$D$，问是否存在直线$l$，使得向量$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$，若存在，指出这样的直线有多少条？若不存在，请说明理由。

答案：9 条

直线与圆锥曲线的位置关系问题，使用判别式容易解决，难度较低，但须注意讨论全面。一些选手对坐标轴的位置重复计算。

2.（本小题满分 15 分）已知p，q（$q\neq 0$）是实数，方程$x^2-px+q=0$有两个实根α，β，数列$\{a_n\}$满足$a_1=p$，$a_2=p^2-q$，$a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}$（$n=3，4，\cdots$）.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式（用α，β表示）；

（Ⅱ）若$p=1$，$q=\frac{1}{4}$，求$\{a_n\}$的前n项和.

答案：当$\Delta=p^2-4q=0$时，$a_n=(n+1)\alpha^n$；当$\Delta=p^2-4q>0$时，$a_n=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$

前 n 项和$S_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$

简单的二阶递推数列特征方程应用。注意分类讨论，不要丢掉两根相等的情形。本题是 2008 年广东高考原题。

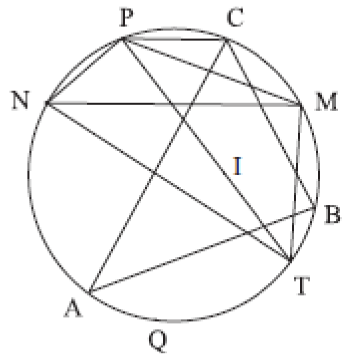
3.（本小题满分 15 分）求函数$y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$的最大值和最小值.

答案：最大值 11，当 x=9 时取到；最小值$3\sqrt{3}+13$，当 x=0 时取到。

带有根式的函数最值，使用柯西不等式或求导均可解决。在考试中，由于时间紧张，推荐使用普适的求导法解决。要注意函数定义域和取等条件。

【分析】2009 年联赛一试试题很简单，均为高考难度，不需要抢分。最关键的是细心认真，尽力追求完美。一些易错点一定要把握住。当然，在解决填空题时，运用一些“极端值法”“不完全归纳法”可以加快解题速度。

第二试



一、如图，M,N 分别为锐角三角形$\triangle ABC$（$\angle A<\angle B$）的外接圆Γ上弧$\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AC}$的中点，过点$C$作$PC//MN$交圆$\Gamma$于$P$点，$I$为$\triangle ABC$的内心，连接$PI$并延长交圆$\Gamma$于$T$.

（I）求证：$MP\cdot MT=NP\cdot NT$；

（II）在弧$\overset{\frown}{AB}$（不含点C）上任取一点Q（$Q\neq A,T,B$），记$\triangle AQC,\triangle QCB$的内心分别为$I_1,I_2$，求证：$Q,I_1,I_2,T$四点共圆.

（I）分析：首先观察图形，看有哪些线段平行、垂直、相等。由题设 PC//MN，且 PC、MN 均为圆上的弦，显然 PCMN 为等腰梯形，其中的两顶角相等、两底角相等、两腰相等、两对角线相等均可得到。

其次观察图形中的相似三角形。由于内心 I 悬浮在三角形内，故首先考虑不含 I 的相似三角形。由于 PM、NT 为圆上两弦，PM、NT、PT、NM 交出的四个三角形有两组相似。

由于题中的内心 I 在(I)(II)中均未直接出现，故题中给出此点可能是为了降低难度，引导考生向这个方向思考，因此 I 一定是大有用场的。观察以 I 为一端点的线段有哪些平行、相等关系。IT、IA、IB、IC 似乎不易建立关联，而容易发现 IN//PM，IM//PN，为保险起见可自行尺规作图，发现 PMIN 是平行四边形这样一个重要性质。

再看欲证结论，是一个线段乘积，首先将其变为比例式，发现位于两个相邻的三角形内。因此容易想到三角形面积公式，此时恰好与 PMIN 是平行四边形有所关联。

此时基本思路已经成型，剩下的工作就是利用边角关系进行推导了。

当然，如果观察欲证结论时没有发现与三角形面积的关联，根据平行四边形对边相等还可以转化到相似三角形的线段比例上来。可谓条条大路通罗马。

标准解答：连 *NI,MI*，由于 *PC//MN*，*P,C,M,N* 共圆，故 *PCMN* 是等腰梯形，因此 NP=MC，PM=NC.　（10 分）

连 AM,CI，则 AM 与 CI 交于 I. 因为∠MIC=∠MAC+∠ACI=∠MCB+∠BCI=∠MCI，所以 MC=MI.

同理 NC=NI.

于是 NP=MI, PM=NI.

故四边形 MPNI 为平行四边形，因此 $S_{\triangle PMT}=S_{\triangle PNT}$（同底，等高）（20 分）

又 P,N,T,M 四点共圆，故∠TNP+∠PMT=180º. 由三角形面积公式

$$S_{\triangle PMT}=\frac{1}{2}PM\cdot MT\sin\angle PMT$$

$$=S_{\triangle PNT}=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PNT$$

$$=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PMT$$

于是 PM・MT = PN・NT.　（30 分）

【分析】注意到评分标准中只要得出 NP=MC，PM=NC 就有 10 分，可见由于本题第一问简单，给分是较宽松的。这个解法比较漂亮，巧妙地利用两个同底等高的三角形，将线段乘积转化为三角形面积，再证明平行四边形。

解法一（焦恩伟）：由 M, N 为 $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{AC}$ 中点知 $B, I, N; C, I, M$ 分别共线. 由 $CP//MN$ 知四边形 $CPMN$ 为等腰梯形，得 $NP = MC, MP = CN$.

故 $\angle NCA = \angle ABN = \angle NBC = \angle NAC$，于是 $NC = NA$.

于是 $NA = MP$，得 $MI = NP$. ①

又 $\angle NTA = \angle NBA = \angle NBC = \angle NMC = \angle MNP = \angle MTI$，且 $\angle ANT = \angle AMT$，有 $\triangle ANT \backsim \triangle IMT$，则 $\dfrac{AN}{NT} = \dfrac{MI}{MT}$.

又由①知 $\dfrac{MP}{NT} = \dfrac{NP}{MT}$，即 $NP \cdot NT = MT \cdot MP$.

【分析】这个思路较为自然，由结论想到需要证明比例相等，进而须证相似三角形。

解法二（白佳伟）：设 NM 与 PT 交于 H . 连接 NI, MI .

由于 $CP//MN$，四边形 $CPMN$ 为等腰梯形，得 $NP = MC, MP = CN$.

由 $\angle MIC = \angle MAC + \angle ACI = \angle MCB + \angle BCI = \angle MCI$，得 $MI = MC = NP$. 同理 $PM = NI$，四边形 $PMIN$ 为平行四边形，故 $NH = MH$.

由于 $\angle PMN = \angle PTN$，$\angle TPN = \angle NMT$，有 $\triangle PHM \backsim \triangle NHT$，故 $\dfrac{NP}{MT} = \dfrac{PH}{MH}$

同理 $\dfrac{MP}{NT} = \dfrac{PH}{HN}$. 因此 $\dfrac{MP}{NT} = \dfrac{NP}{MT}$，即 $NP \cdot NT = MT \cdot MP$.

【分析】这个思路同样是利用相似三角形，再回归到平行四边形。

解法三（刘晓艺）：由正弦定理，$\dfrac{MI}{\sin\angle MPI} = \dfrac{PI}{\sin\angle PMI} = \dfrac{PC}{\sin\angle PNI} = \dfrac{NC}{\sin\angle NPC}$.

由于 $PC//MN$，

$$\frac{NP}{MP} = \frac{\sin\angle NMP}{\sin\angle PNM} = \frac{\sin\angle MPC}{\sin(\pi - \angle NPC)} = \frac{\sin\angle MAC}{\sin\angle NBC} = \frac{\sin\frac{1}{2}\angle BAC}{\sin\frac{1}{2}\angle ABC}$$

$$\frac{NT}{MT} = \frac{\sin\angle NPT}{\sin\angle TPM} = \frac{\sin\angle NPI}{\sin\angle IPM} = \frac{\sin\angle PNT \cdot \frac{IM}{PI}}{\sin\angle PMI \cdot \frac{IN}{PI}} = \frac{\sin\angle PNI}{\sin\angle PMI} \cdot \frac{IN}{IM}$$

故 P, M, T, N 共圆，$\angle PNI + \angle PMI = \pi$.

因此 $\dfrac{NT}{MT} = \dfrac{IN}{IM} = \dfrac{\sin\angle IMN}{\sin\angle INM} = \dfrac{\sin\angle AMN}{\sin\angle BNM} = \dfrac{\sin\angle ABN}{\sin\angle BAM} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\angle ABC}{\sin\frac{1}{2}\angle BAC}$

所以 $\dfrac{NT}{MT} = \dfrac{MP}{NP}$，即 $MP \cdot MT = NP \cdot NT$.

【分析】这是一个纯三角解法，全部是利用角的关系，比较漂亮。

第一问各种解法都抓住了 *PMIN* 是平行四边形的特征。在解决平面几何问题之前，不要急于推导，而要首先准确作图，观察其中存在的平行、相似、长度相等、角相等这些特殊关

系，选出其中与已知或求证关系密切的作为“桥梁”，在条件和结论之间树立“小目标”，降低问题难度，同时理顺解题思路。只要认真思考，这一问是不难解出的。

（II）分析：对于须证四点共圆的问题，由于本题中内心与其他元素联系不紧密，托勒密定理显然不好用。因此考虑证明同弧所对圆周角相等。

由(I)的结论，考虑利用其他元素转化边的长度。平行四边形在(I)中已经用过，因此使用等腰梯形的两组边相等。在解决与圆相关的内心问题时，“鸡爪定理”（内心性质）是沟通内心与三角形其他元素的重要武器。此时，对 NC、MC 用鸡爪定理替换，可得一个比例关系。由于它并不对应三角形相似，因此需要寻找其他边角关系。

仍然寻找新图形中出现了哪些平行、相等、垂直，结果发现分别以 I_1、I_2 为一端点的线段并无上述特殊性质。于是寻找 I_1、I_2 所在的相似三角形。这一过程比较复杂，也需要准确作图才能发现。一旦证出相似，再根据角的关系立即导出结论。笔者第二问没有解出，就是因为没有找到合适的相似三角形沟通 I_1、I_2 的关系。

标准解答：因为 $\angle NCI_1=\angle NCA+\angle ACI_1=\angle NQC+\angle QCI_1=\angle CI_1N$，

所以 $NC=NI_1$，同理 $MC=MI_2$。由 $MP\cdot MT=NP\cdot NT$ 得 $\dfrac{NT}{MP}=\dfrac{MT}{NP}$

由（I）所证 MP=NC, NP=MC, 故 $\dfrac{NT}{NI_1}=\dfrac{MT}{MI_2}$ （40 分）

又因 $\angle I_1NT=\angle QNT=\angle QMT=\angle I_2MT$，

有 $\triangle I_1NT\backsim\triangle I_2MT$，故 $\angle NTI_1=\angle MTI_2$，

从而 $\angle I_1QI_2=\angle NQM=\angle NTM=\angle I_1TI_2$，

因此 Q,I_1,I_2,T 四点共圆。 （50 分）

【分析】第二问的解答看似不长，实则难度较大。很多选手在这一问上花费了太多的时间，而影响了解决后面题目的时间和心态，直接导致不少选手在联赛中惨败。联赛中应合理分配时间，果断放弃，不要因为一道题目影响整个第二试。

这是一道中规中矩的平面几何题，没有应用“重要定理”，只是最基本的寻找边角关系、三角形相似、线段比例。本题来源于 2003 年国家集训队试题，只是难度有所降低。

二、求证不等式：

$$-1<(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1})-\ln n\le\frac{1}{2},n=1,2,...$$

分析：这个不等式乍看起来很不“常规”，出现了自然对数 ln。但我们应当学过调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 的趋近关系，因此应当想到将 $\frac{k}{k^2+1}$ 向 $\frac{1}{k}$、$\frac{1}{k+1}$ 的方向放缩，这一步也是大家都能想到的。一些选手试图加强命题，但没有成功。

下面一步就比较困难：如何将一个离散的调和级数之和与连续的函数值建立关联？一些选手试图直接放缩，但都以失败告终。我们采取的办法是利用数学归纳法的思想，逐项比较。将 $\ln k$ 拆成 $\ln(k+1)-\ln k$ 的部分和，这样只需比较每个 $\frac{k}{k^2+1}$ 与 $\ln\frac{k+1}{k}$ 的大小关系，然后求和即可。

下面遇到的一个困难就是如何比较大小。针对对数函数，我们只能用导数解决。但是，这个导数的构造又很有技巧，采用高考中常见的一次求导不行，再求二阶导数是不可行的。因为 $(1+\frac{1}{x})^x$ 与 $(1+\frac{1}{x})^{x+1}$ 构成了一对有趣的“孪生关系”，若证 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的单调性，需首先

证$(1+\frac{1}{x})^{x+1}>e$，而第二个命题求导后又可以转化成$(1+\frac{1}{x})^{x}<e$。因此，很多选手在此处陷入了困境，或弃而舍之，或不加证明地直接应用$(1+\frac{1}{x})^{x}$的单调性。解法一中给出了这种函数单调性的证明方法，对其他求导问题也有借鉴意义。

标准解答：首先证明一个不等式

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, x>0\cdots\cdots①$$

事实上，令$h(x)=x-\ln(1+x), g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，

则对$x>0$，$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0, g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0.$

于是$h(x)>h(0)=0, g(x)>g(0)=0.$

在①中取$x=\frac{1}{n}$得$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}\cdots\cdots②$　　（10 分）

令$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$，则$x_1=\frac{1}{2}$，

$$x_n-x_{n-1}=\frac{n}{n^2+1}-\ln(1+\frac{1}{n-1})<\frac{n}{n^2+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{(n^2+1)n}<0$$

因此$x_n<x_{n-1}<\ldots<x_1=\frac{1}{2}$　　（30 分）

从而$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{k}{k^2+1}-\ln(1+\frac{1}{k}))+\frac{n}{n^2+1}$

$>\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k})=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k^2+1)k}$

$\geq-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)k}=-1+\frac{1}{n}>-1$　　（50 分）

【分析】这个解法其实是下述解法二、三经优化后得到的。从本质上看，此法仍然是比较$\ln(n+1)-\ln n$与$\frac{n}{n^2+1}$的大小关系，然后用数学归纳法。在表达方面，采用了构造数列的方式，使论证更清晰、更简洁，不露出数学归纳的痕迹。

解法一：首先用数学归纳法证明

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\ln n$$

①当$n=2$时，$\frac{1}{2}<\ln 2\Leftrightarrow\ln 4>1$成立.

②假设命题对$n=m$成立.

设$f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+1}$，则$f'(x)=f(x)\cdot(-\frac{1}{x}+\ln(1+\frac{1}{x}))$.

令 $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x}+\ln(1+\frac{1}{x})$，则 $g'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x^2}>0$，故 $g(x)$ 单调递增，$g(x)<\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，又 $f(x)>0$，有 $f'(x)=f(x)\cdot g(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减．又 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e$，所以 $\frac{1}{m+1}<\ln\frac{m+1}{m}$．

由归纳假设，$\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}<\ln m$，两式相加得

$$\sum_{k=2}^{m+1}\frac{1}{k}<\ln m+\ln\frac{m+1}{m}=\ln(m+1)$$

即命题对 $n=m+1$ 也成立.

③由①②可知命题对 $n\in N^+,n\ge 2$ 成立.

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$

$=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\le\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2}-\ln n$

$\le\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\le\frac{1}{2}$，等号当且仅当 $n=1$ 时成立.

下面用数学归纳法证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n>0$$

①当 $n=2$ 时，$1>\ln 2$，命题成立.

②当 $n=m$ 时，由均值不等式易得

$$(1+\frac{1}{n})^n=1\cdot(1+\frac{1}{n})^n<\left(\frac{1}{n+1}\left(1+(1+\frac{1}{n})+\ldots+(1+\frac{1}{n})\right)\right)^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

故数列 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，有 $(1+\frac{1}{m})^m<e$.

所以 $m\ln(1+\frac{1}{m})<1$，$\frac{1}{m}>\ln\frac{m+1}{m}$.

由归纳假设，$\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}>\ln m$，

两式相加得 $\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}>\ln(m+1)$，故命题对 $n=m+1$ 也成立.

③由①②可知，命题对 $n\in N^+,n\ge 2$ 都成立.

因此 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$

$>\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+k}-\ln n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\ln n$

$> -1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n > -1$，命题得证.

【分析】这是最自然的方法，采用放缩，变成调和级数，试图利用数学归纳法；归纳步骤需要用到 $(1+\frac{1}{x})^x$ 的单调性，于是采用导数证明。事实上，两侧的单调性均可使用类似的方法，只是其中一侧有更简便的均值不等式法。这个求导的步骤有技巧性：令 $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 是一种常用的构造方法，通过另一个辅助函数的单调性来判断导函数的正负。

解法二（刘晓艺）：由导数定义知，$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}$ 为 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的导数，而 $\ln(1+x)$ 的导数为 $\frac{1}{1+x}$，故 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，即 $\lim_{x\to 0}(x-\ln(x+1))=0$.

记 $g(x)=x-\ln(x+1)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，故 $g(x)$ 单增.

则 $g(x)>\lim_{x\to 0}(x-\ln(1+x))=0$，$g(x)>0, g(\frac{1}{k})>0 \Rightarrow \frac{1}{k}>\ln\frac{k+1}{k}$.

因此 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$

$> \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+2}{k+1}$

$= \ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}$

$= \ln\frac{n+2}{2}=\ln(n+2)-\ln 2$

$> \ln n-\ln e=\ln n-1$.

再记 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$，$h(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}(x>0)$，则

$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$，$h(x)>\lim_{x\to 0}(\ln(1+x)-\frac{x}{1+x})$.

又 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，有 $\lim_{x\to\infty}(\ln(1+x)-\frac{x}{1+x})=0$，故 $h(x)>0, h(\frac{1}{k})>0 \Rightarrow \ln\frac{k+1}{k}>\frac{1}{k+1}$.

因此 $\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2+1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$

$< \sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}$

$= \ln\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}=\ln n$

所以 $f(n)-f(1)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n<0$，即 $f(n)\le f(1)=\frac{1}{2}$． 证毕．

【分析】这个解法有一定技巧，利用导数的定义，将求导问题转化为极限问题，建立了 $\frac{1}{x}$ 与 $\ln\frac{x}{x-1}$ 之间的大小关系。

事实上，这个求导转化成极限的过程就是高等数学中常用的洛必达法则：若 $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$，且 $h(x)\ne 0$，当 $x\to 0$ 时 $g(x)\to 0,h(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{g'(0)}{h'(0)}$．

解法三（姚博文）：先证明引理：当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$\ln x\le x-1$．

事实上，令 $f\left(x\right)=\ln x-x+1,x\in\left(0,+\infty\right)$，则 $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$． 由下表

x	$\left(0,1\right)$	$\left(1,+\infty\right)$
$f'\left(x\right)$	$+$	$-$
$f\left(x\right)$	□	□

可知，$f\left(x\right)\le f\left(1\right)=0$，即 $\ln x\le x-1$．

回到原题：当 $n=1$ 时 $-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n=\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$ 成立；以下 $n=2,3,\cdots$．

令 $x=\frac{k-1}{k}\left(k=2,3,\cdots\right)$，得 $\ln\frac{k-1}{k}\le\frac{k-1}{k}-1=-\frac{1}{k}$，即 $\ln k-\ln\left(k-1\right)\ge\frac{1}{k}$，

所以 $\ln n=\sum_{k=2}^{n}\left(\ln k-\ln\left(k-1\right)\right)\ge\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$，

又 $\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$，

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}<\frac{1}{2}+\ln n$，即 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n<\frac{1}{2}$

令 $x=\frac{k}{k-1}$，得 $\ln\frac{k}{k-1}\le\frac{k}{k-1}-1=\frac{1}{k-1}$，即 $\ln k-\ln\left(k-1\right)\le\frac{1}{k-1}$，累加，得

$\ln n=\sum_{k=2}^{n}\left(\ln k-\ln\left(k-1\right)\right)\le\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$，

$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-1>\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-1\ge\ln n-1$，

即 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n>-1$．

综上所述，得 $-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\le\frac{1}{2},n=1,2,\cdots$．

【分析】这个解法也较为巧妙，同样是建立 $\frac{1}{x}$ 与 $\ln\frac{x}{x-1}$ 之间的大小关系，但使用的是辅助不等式 $\ln x\le x-1$，比解法二更漂亮。

解法四（杨蓉）：由图像知，$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln n$，$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}>\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln n$，即 $\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}>\ln n-1$．以下类似解法一，用数学归纳法证明.

【分析】此解法利用了高等数学中积分的概念，图像清晰地说明了每次多出的一项恰好是曲线与矩形块上沿围成的曲边三角形面积，这就是解法二中所述的逐项放缩。这个面积图像揭示了连续与离散的差异，从本质上将调和级数之和与对数函数联系起来。这也许正是本题的命题背景。题中的 $\frac{k}{k^2+1}$，只需要是一个 $\frac{1}{k}$ 与 $\frac{1}{k+1}$ 之间的任意值。

但在考试中，运用图像说明不甚严密，容易误判。

本卷代数问题偏简单，初看是一道不等式，实质是函数问题，问题的难点在于证明调和级数与 e 的大小关系（其他证法与之等效）。这需要一些极限的思想，属于高考范围内，熟悉的选手应该不难用构造函数、求导的方法证明。一些选手试图使用经典不等式的放缩方法，是很难解决的。有的选手导数方法不过硬，求导出现了错误。

这道题的求导有一定技巧，有高等数学背景的选手更容易想到。同时，由高等数学背景的选手根据积分的定义，容易由自然对数迅速联想到调和级数，少走弯路。由此可见，适当拓宽知识面对于高中联赛不无积极意义。

三、设 k,l 是给定的两个正整数．证明：有无穷多个正整数 $m\ge k$，使得 C_m^k 与 l 互素.

分析：此题要证明“无穷多个”。可以采用的方法有两个：极端值原理（设出最大找矛盾）、构造无穷多个满足条件的整数。如果采用极端值原理，最后还要化归到构造上来。

如何构造一个满足条件的整数？首先采用“试探法”，对简单的 k,l 找出满足条件的 m，发现它们与 l 有倍数关系，于是从质因子个数的角度考虑（组合数问题的通法），得到多种可行构造。

标准解答一：对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)$，我们证明 $(C_m^k,l)=1$.

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明 $p\nmid C_m^k$.

若 $p\nmid k!$，则由 $k!C_m^k=\prod_{t=1}^{k}(m-k+i)\equiv\prod_{t=1}^{k}[i+tl(k!)]\equiv\prod_{i=1}^{k}i\equiv k!(\bmod p)$

即 p 不整除上式，故 $p\nmid C_m^k$．　（20 分）

若 $p\mid k!$，设 $\alpha\ge 1$ 使 $p^\alpha\mid k!$，但 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，则 $p^{\alpha+1}\mid l(k!)$. 故由

$$k!C_m^k=\prod_{i=1}^{k}(m-k+i)\equiv\prod_{i=1}^{k}[i+tl(k!)]\equiv\prod_{i=1}^{k}i\equiv k!(\bmod p^{\alpha+1})$$

及 $p^\alpha\mid k!$，且 $p^{\alpha+1}\nmid k!$，知 $p^\alpha\mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1}\nmid k!C_m^k$，从而 $p\nmid C_m^k$．（50 分）

标准解答二：对任意正整数 t，令 $m=k+t\cdot l\cdot(k!)^2$，我们证明 $(C_m^k,l)=1$.

设 p 是 l 的任一素因子，只要证明 $p\nmid C_m^k$.

若 $p\nmid k!$，则由 $k!C_m^k=\prod_{t=1}^{k}(m-k+i)\equiv\prod_{t=1}^{k}[i+tl(k!)^2]\equiv\prod_{i=1}^{k}i\equiv k!(\bmod p)$

即 p 不整除上式，故 $p \nmid C_m^k$.　（20 分）

若 $p \mid k!$，设 $\alpha \ge 1$ 使 $p^\alpha \mid k!$，但 $p^{\alpha+1} \nmid k!$，则 $p^{\alpha+1} \mid l(k!)^2$. 故由

$$k!C_m^k = \prod_{i=1}^{k}(m-k+i) \equiv \prod_{i=1}^{k}[i+tl(k!)^2] \equiv \prod_{i=1}^{k} i \equiv k! (\bmod p^{\alpha+1})$$

及 $p^\alpha \mid k!$，且 $p^{\alpha+1} \nmid k!$，知 $p^\alpha \mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!C_m^k$，从而 $p \nmid C_m^k$.　（50 分）

【分析】这两个解答本质上是相同的，都是利用阶乘进行构造。CMO2009 第 6 题（见本书 10.8 节）也是采用阶乘构造的方法解决整除问题，可见这是一种通法。

解法一：令 $m = k + n \cdot l^a, n \in N$，其中 a 为充分大的正整数.

考虑 l 的任意一个素因子 p，由组合数定义，

$$C_m^k = C_{k+n\cdot l^a}^k = \frac{(k+n\cdot l^a)(k-1+n\cdot l^a)\ldots(1+n\cdot l^a)}{k(k-1)\ldots1}$$

对 $i = 1,2,\ldots,k$，设 α 是满足 $p^\alpha \mid i$ 且 $p^{\alpha+1} \nmid i$ 的正整数.

由于 a 为充分大的正整数，且 $p \mid l$，有 $p^{\alpha+1} \mid l^a$，故 $p^\alpha \mid i + l^a \cdot n$，$p^{\alpha+1} \nmid i + l^a \cdot n$，故 i 与 $i + l^a \cdot n$ 中所含素因子 p 的幂次相同.

故 $(k+n\cdot l^a)(k-1+n\cdot l^a)\ldots(1+n\cdot l^a)$ 与 $k!$ 中所含素因子 p 的幂次相同．因此 C_m^k 的分子分母中的 p 在约分时上下消去，有 $p \nmid C_m^k$.

对任意 $p \mid l$，都有 $(p, C_m^k) = 1$，故 $(l, C_m^k) = 1$，而这样的 n 有无穷多个，命题得证.

解法二：令 $m = k + l^a$，其中 a 为充分大的正整数.

下同解法一．由于充分大的正整数 a 有无穷多个，命题得证.

【分析】解法一是考场上的解法，事实上没有必要设置系数 k，只要指数 a 充分大即可。考虑这个解法的原因是首先希望利用 $m = k + nl$，其后代入小数据试验发现不可行，其原因是因子的幂次不够高，因此考虑增大 l 的幂次，于是有了解法一的构造。

有些选手抓住 $m = k + nl$ 这个错误的构造不放，甚至提出了错误的“证明”，这种死钻牛角尖的解题态度不可取。应该找到出现反例的原因，观察反例的特点，加强构造中的条件限制，试图完善之。

解法三（焦恩伟）：设 $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 为素数，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in N^+$. 设 k 在 p 进制下有 a_i 位（$i = 1,2,\ldots,r$）.

取 $n_i \ge a_i (i = 1,2,\ldots,r)$，由孙子定理，满足 $m \equiv p^{n_i - 1} (\bmod p^{n_i+1})$ 的 m 有无穷多个.

记 $S_p(m)$ 为 p 进制下 m 的各位数字之和，类似地定义 $S_p(m-k)$.

令 $m = a \cdot p^{n_i+1} + (p-1)(p^{n_i-1} + p^{n_i-2} + \ldots + 1)$，于是 $m = (s_1 s_2 \ldots s_n \underbrace{(p-1)\ldots(p-1)}_{n_i-1\text{个}})_p$. 此时由于不发生进位，$S_p(m) = S_p(m-k) + S_p(k)$.

由 p 进制的性质知，$m!, (m-k)!, k!$ 中含有 p 的幂次分别为

$\dfrac{m - S_p(m)}{p-1}, \dfrac{k - S_p(k)}{p-1}, \dfrac{m-k-S_p(m-k)}{p-1}$. 又因为 $m = (m-k) + k$，得

$\dfrac{m - S_p(m)}{p-1} = \dfrac{k - S_p(k)}{p-1} + \dfrac{m-k-S_p(m-k)}{p-1}$，故 $C_m^k = \dfrac{m!}{(m-k)!k!}$ 中不含素因子 p.

由于这样的 a 有无穷多个，命题得证.

【分析】这个解法很漂亮，巧妙地将 p 进制应用于幂次分析之中，并利用中国剩余定理将多个质因子结合起来。可能受到了 Lucas 定理的影响。美中不足的是应用了不常见的定理，证明不太“初等”。

解法四（姚博文）：当 $l=1$，或 $m=1$ 时，结论明显成立．以下设 k、$l\geq 2$，并作 l 的素因数分解式 $l=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\mathrm{L}\ \ p_s^{\alpha_s}$，并令 $k=A\cdot p_1^{e_1}p_2^{e_2}\mathrm{L}\ \ p_s^{e_s}$，其中 e_1、e_2、L 、$e_s\in N$，$A\in N^*$，并且 $\left(A,l\right)=1$．

任取 $n\in N^*$ 且 $n>A$，定义 $m=n\cdot p_1^{e_1+k}p_2^{e_2+k}\mathrm{L}\ \ p_s^{e_s+k}-1$，则 $m\geq k$；以下称满足 $p^{\alpha}\big|n$ 的最大非负整数 α 为“正整数 n 中素数 p 的次数”．

记 i 中 p^j 的次数为 α，则 $p_j^{\alpha}\big|i$，且 $p_j^{\alpha}\leq i$．

Q $\quad p_j^{e_j+k}\Big|m+1\Rightarrow p_j^k\Big|m+1$，$k\geq i\geq p_j^{\alpha}\geq 2^{\alpha}=C_{\alpha}^0+C_{\alpha}^1+C_{\alpha}^2+\mathrm{L}\ +C_{\alpha}^{\alpha}\geq \alpha+1$，

∴ $\quad p_j^{\alpha+1}\Big|m+1$．

又 $\quad C_m^k=\dfrac{m\left(m-1\right)\mathrm{L}\ \left(m-k+1\right)}{k!}=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\frac{m+1-i}{i}$，

∴ $\quad C_m^k$ 的分母和分子中素因数 p_j 的次数相等，从而 $\left(p_j,C_m^k\right)=1\left(j=1,2,\mathrm{L}\ ,s\right)$．

又　素数 $p_1,p_2,\mathrm{L}\ ,p_s$ 互不相同，

∴ $\quad \left(l,C_m^k\right)=1$，故上述无穷多个正整数 m 均满足条件．

解法五（刘晓艺）：反证法．假设只有有限多个 m 满足题意．

由于 $m=k$ 时，$C_m^k=1$ 显然成立，因此这样的 m 存在．设 m 为满足 $(l,C_m^k)=1$ 的最大者．

设 l 的素因子为 $p_1,p_2,...,p_r$．令 $a>m$，$n=m+l^a$．

对 $t=m,m-1,...,m-k+1$，设 $p_i^{\alpha}\parallel t$，由于 $a>m\geq\alpha$，有 $p_i^{\alpha+1}\mid l^a$，故 t 与 $t+l^a$ 中所含素因子 p_i 的幂次相同．而由于 $p_i\nmid C_m^k=\dfrac{m(m-1)...(m-k+1)}{k(k-1)...1}$，且 t 中素因子 p_i 的幂次不少于 $t-m+k$ 中素因子 p_i 的幂次，故 t 与 $t-m+k$ 中所含素因子 p_i 的幂次相同．因此 $t-m+k$ 与 $t+l^a$ 中所含素因子 p_i 的幂次相同．

因此 $C_n^k=\dfrac{(m+l^a)(m-1+l^a)...(m-k+1+l^a)}{k(k-1)...1}$ 中分子分母所含素因子 p_i 的幂次相同，有 $p\nmid C_n^k$，而 $n=m+l^a>m$，与 m 的最大性矛盾．

因此存在无穷多个 m 满足题意．

【分析】这是利用极端值原理的一种解法。本质上仍然是构造，与解法一类似。

解法六（马晓鹏）：**Lucas 定理**：设 m,n 为正整数，p 是素数，且 $m=m_kp^k+m_{k-1}p^{k-1}+...+m_1p+m_0$，$n=n_kp^k+n_{k-1}p^{k-1}+...+n_1p+n_0$．则 $C_m^n\equiv\displaystyle\prod_{i=0}^{k}C_{m_i}^{n_i}\pmod p$．

也就是说，$p\mid C_m^n$ 当且仅当 n 的 p 进制表示中至少有一位大于 m 的 p 进制表示中对应

的一位.

证明：$\sum_{c=0}^{r} C_r^c=(1+x)^r=\prod_{m=0}^{k}\left((1+x)^{p^m}\right)^{r^m}$

$\equiv\prod_{m=0}^{k}(1+x^{p_m})^{r_m}\pmod p$（由于$(1+x)^{p^m}\equiv 1+x^{p^m}\pmod p$）

$\equiv\prod_{m=0}^{k}\left(\sum_{s_m=0}^{r_m}C_{r_m}^{s_m}x^{s_m p^m}\right)\pmod p$

$\equiv\sum_{c=0}^{r}\left(\sum\prod_{m=0}^{k}C_{r_m}^{s_m}\right)x^c\pmod p$

其中Σ表示取遍所有满足$0\le s_m\le c_m<p,\sum_{m=0}^{k}s_m p^m=c$的集合$(s_0,s_1,...,s_k)$.

如果对每个m，都有$c_m\le r_m$，则由于c的p进制表示是唯一的，至多存在一组$(s_0,s_1,...,s_k)$使得$s_m=c_m$.

若对某个m，$c_m>r_m$，则内层Σ=0.

在上述两种情况中，对$c=0,1,...,r$，计算x^c的系数即可证明 Lucas 定理.

回到原题. 对于给定的k，设其p进制表示中的最高位为r. 令$m\equiv k\pmod{p^r}$，则n,m的p进制表示中第$0,1,...,r$位均相同，由 Lucas 定理，$p\nmid C_m^k$.

设l的全部素因子为$p_1,p_2,...,p_t$，则对每个p_i，均需满足$m\equiv k\pmod{p_i^{r_i}}$. 由中国剩余定理，只需$m\equiv k\pmod{p_1^{r_1}p_2^{r_2}...p_t^{r_t}}$，这样的$m$有无穷多个，证毕.

【分析】这个解法可谓揭示了此题的命题背景。如果 Lucas 定理不加证明地引用，本题将变得异常简单，只需应用一步中国剩余定理即可解决。事实上，本题是 Lucas 定理的弱化。

解法七（yunxiu）：当$l=1$时，结论显然成立. 下设$l>1$. 设l的全部素因子为$p_1,p_2,...,p_t$，则对任意p_i，都存在唯一的非负整数α_i使得$p_i^{\alpha_i}\mid k!,p_i^{\alpha_i+1}\nmid k!$.

对任意正整数$a>\max\{k,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t\}$，令$m=l^a-1$，显然$m>k$. 由于$C_m^k=\dfrac{(l^a-1)(l^a-2)...(l^a-k)}{k!}$，有$k!C_m^k=l^a x+(-1)^k k!$，其中$x$为整数. 整理得$k!(C_m^k-(-1)^k)=l^a x$.

对任意$1\le i\le t$，由于$p_i^a\mid l^a$，$a>\alpha_i$，有$p_i\mid C_m^k-(-1)^k$，故$(p_i,C_m^k)=1$. 因此$(l,C_m^k)=1$. 这样的正整数a有无穷多个，命题得证.

解法八（Napoleon）：设$l=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_s^{\alpha_s}$，其中$p_i(i=1,2,...,s)$为素数.

而$m!$中p_i的次数由勒让德函数有

$$L_{p_i}(m!)=\sum_{\alpha\ge 0}\left[\frac{m}{p_i^{\alpha}}\right]$$

而$(m-k)!$与$m!$中p_i的次数同理写出：

$$L_{p_i}((m-k)!)=\sum_{\alpha\ge 0}\left[\frac{m-k}{p_i^{\alpha}}\right],L_{p_i}(k!)=\sum_{\alpha\ge 0}\left[\frac{k}{p_i^{\alpha}}\right]$$

由上述三式，若证 $L_{p_i}(m!) \le L_{p_i}((m-k)!) + L_{p_i}(k!)$，只需证

$$\sum_{\alpha\ge0}\left[\frac{m}{p_i^\alpha}\right]-\sum_{\alpha\ge0}\left[\frac{k}{p_i^\alpha}\right]-\sum_{\alpha\ge0}\left[\frac{m-k}{p_i^\alpha}\right]\le 0 \qquad ①$$

又当 $m\equiv k(\bmod p_i^\alpha)$ 时，设 $m=cp_i^\alpha+d, k=ep_i^\alpha+d$，其中 c,d,e 为整数且 $0\le d\le p_i^\alpha-1$. 又 $m\ge k$，故 $c\ge e$. 故 $\sum\limits_{\alpha\ge0}(c-e-(c-e))=0$，①成立，亦即 $(C_m^k,p)=1$.

由中国剩余定理，存在无穷多个 $m\equiv k(\bmod p_i^\alpha)$，此时 $(C_m^k,l)=1$.

解法九（sufangzai）：当 $k=1$ 或 $l=1$ 时，命题显然成立.
构造 $m=n\cdot k!\cdot l-1$，其中 n 为正整数.

则 $C_m^k=\dfrac{1}{k!}m(m-1)\ldots(m-k+1)$

$=\dfrac{1}{k!}(n\cdot k!\cdot l-1)\cdot2(\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{2}-1)\cdot3(\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{3}-1)\cdot\ldots\cdot k(\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{k}-1)$

$=(n\cdot k!\cdot l-1)(\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{2}-1)\ldots(\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{k}-1)$

显然 $n\cdot k!\cdot l$，$\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{2}$，…，$\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{k}$ 为整数，且为 l 的倍数，故 $n\cdot k!\cdot l-1$，$\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{2}-1$，…，$\dfrac{n\cdot k!\cdot l}{k}-1$ 分别与 l 互质，因此 C_m^k 与 l 互质.

综观上述解法，从总体思路上来说，可以分为两类：整体证明、分质因数证明。整体证明法中，按升高质因数次幂的方式来分，有阶乘构造、次幂构造；按常数项来分，有加 k 法、减 1 法。分质因数证明，即构造满足每个质因子互质的同余式，而后利用中国剩余定理，除了应用整体证明法中的构造外，还可以与进制联系，应用“高级”数论定理。

本题不仅结论很漂亮，而且有多种构造解题途径，还有 Lucas 定理这个深刻的数论背景，是一道好题。这些构造通过试验简单情况容易想出，难度不大。

部分选手对互素的理解不到位，提出了错误的构造并加以“证明”，其中对所含质因数幂次的分析中有漏洞。由于题目的开放性很大，给阅卷人提出了更高的要求，对于选手的构造，需要认真验证其证明过程，谨防“浑水摸鱼”。

四、在非负数构成的 3×9 数表

$$P=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \end{pmatrix}$$

中每行的数均不相同，前 6 列中每列的三数之和为 1，$x_{17}=x_{28}=x_{39}=0$，$x_{27},x_{37},x_{18},x_{38},x_{19},x_{29}$ 均大于 1．如果 P 的前三列构成的数表

$$S=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

满足下面的性质（0）：对于数表 P 中的任意一列$\begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}(k=1,2,...,9)$均存在某个 $i\in\{1,2,3\}$ 使得 $x_{ik}\le u_i=\min\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\}$.

求证：（i）最小值$u_i=\min\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\},i=1,2,3$一定取自数表 S 的不同列.

（ii）存在数表 P 中唯一的一列$\begin{pmatrix} x_{1k^*} \\ x_{2k^*} \\ x_{3k^*} \end{pmatrix},k^*\ne 1,2,3$使得 3×3 数表

$$S'=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

仍然具有性质（0）.

分析：这道题很长，超出了一般数学竞赛题的长度。很多选手望而却步。但事实上第一问只要很简单的分析即可得出结论，即使是没有参加数学竞赛的学生也能“秒杀”。

第二问的难度很大，考场上时间很紧，解出的可能性不大，事实上全国几乎无人解出，成为继 2007 年之后的又一道“废题”；但练习中经过认真思考，是可以讨论清楚元素之间的关系的。这道题从命题的角度而言，条件过于纷繁复杂，有些“为构造条件而构造条件”的造作之感，缺乏数学美感，与本卷代数问题、数论问题无法比拟。

另解：（i）假设最小值u_1,u_2,u_3不是来自 S 的不同列，则必有两个u_i属于同一列，不妨设u_1,u_2属于第 1 列．则不论u_3属于 1、2、3 中的哪一列，第 2、3 列中总有一列不包含任何u_i，不妨设为第 3 列.

由于同行元素互不相同，$u_1<x_{13},u_2<x_{23},u_3<x_{33}$．而对于$k=3$，不存在 $x_{ik}\le u_i=\min\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\}$，与性质（0）矛盾.

（ii）首先证明存在性.

假设不存在这样的k^*使得S'满足性质（0）.

不妨设$u_1=x_{11},u_2=x_{22}$，由（i）知$u_3=x_{3k^*}$．由假设，对任意$k^*=4,5,6,7,8,9$都存在一列x_{ik}，使得对每个$i\in\{1,2,3\}$，都有$x_{ik}>u_i$.

取k^*为$4,5,6,7,8,9$中使得x_{3k^*}最大者，则由于$x_{37}>1,x_{38}>1$，有$x_{3k^*}>1$，而 $x_{3k}>u_3=\max\{x_{3k^*}\}>1$.

若$k=1,2,3,4,5,6$，则这一列之和大于 1，与每列和为 1 矛盾；

若$k=7,8,9$，则$x_{3k}>x_{3k^*}$，与x_{3k^*}的最大性矛盾.

其次证明唯一性.

假设存在两列a,b同时满足性质（0）．首先考虑a列形成的数表 S.

仍然不妨设$u_1=x_{11},u_2=x_{22},u_3=x_{33}$，且$x_{32}<x_{31}$.

因为$x_{32}<x_{31},x_{22}<x_{21}$，$u_1'=\min\{x_{11},x_{12},x_{1a}\}=x_{11}$．由（i），

$u_3'=\min\{x_{31},x_{32},x_{3a}\}=x_{3a}$ ①或$u_3'=\min\{x_{21},x_{22},x_{2a}\}=x_{2a}$ ②

若为情形①，由各列之和为 1，有$u_1'=x_{11},u_2'=x_{22}<x_{23}$，$u_3'=x_{3a}\ge x_{33}$．同理，由于选出$b$列也满足性质（0），有$x_{33}\ge x_{3a}$．故$x_{33}=x_{3a}$，$k=3$，矛盾．

若为情形②，有$u_1'=x_{11},u_2'=x_{2a},u_3'=x_{32}$．$x_{1b}>x_{11}=u_1'$，$x_{3b}>x_{32}=u_3'$，由各列之和为 1，$x_{2b}\le x_{2a}$．同理，考虑选出$b$列，可得$x_{2a}\le x_{2b}$．故$x_{2a}=x_{2b}$，由于同行元素互不相同，有$a=b$，矛盾．

综上，存在唯一的$k*$使得S'满足性质（0）．

全卷分析：这次全国高中联赛试题的最大问题在于陈题过多，对做过这些陈题的选手和未做过这些陈题的选手来说构成了一种不公平。从命题质量上而言，第一试难度偏简单，可能是为了联赛的普及；二试一、二、三题质量较高，结论美观、难度适中、方法多样，但组合试题的质量有待提高。试卷难度不是很大，与先前预测的“难题”不尽相同。考试中心态的调整、时间的分配仍然是重中之重的问题，一定要保证考场正常发挥，不要出现大的情绪波动；不要在一道题上花费太多的时间。这些“软实力”都是考前模拟训练时应该注意的。

10.6 2009 女子数学奥林匹克

1．求证：方程 $abc=2009(a+b+c)$ 只有有限组正整数解 (a,b,c).

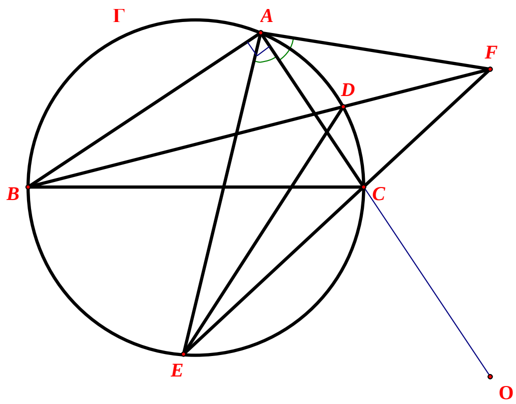
证明：当 $a>2009$ 时，有不等式

$$(b-1)(c-1)<(b-\frac{2009}{a})(c-\frac{2009}{a})=2009+\frac{2009^2}{a^2}<2010$$

此时 b,c 的可能取值只有有限多种.

类似的，当 $b>2009$ 或 $c>2009$ 时，也只有有限多组可能的 (a,b,c). 而 $a,b,c\le 2009$ 只有有限多组，故原方程只有有限组正整数解.

2．如图，在△*ABC* 中，∠*BAC*＝90°，点 *E* 在△*ABC* 的外接圆 Γ 的弧 *BC*（不含点 *A*）内，*AE*＞*EC*．连接 *EC* 并延长至点 *F*，使得∠*EAC*＝∠*CAF*，连接 *BF* 交圆 Γ 于点 *D*，连接 *ED*，记△*DEF* 的外心为 *O*．求证：*A*, *C*, *O* 三点共线．



证明：由于 *O* 为□*DEF* 外心，$\angle EOF=2(180^\circ-\angle EDF)$，而 $180^\circ-\angle EDF=\angle EDB=\angle EAB$．由于 $\angle BAC=90^\circ$，$\angle EAB=90^\circ-\angle EAD$．得到 $\angle EOF=180^\circ-2\angle EAD=180^\circ-\angle EAF$，故 *AEOF* 四点共圆．由于 $OE=OF$，得 $\angle OEF=\angle OFE$，故 *AO* 是 $\angle EAF$ 的平分线，与 *AC* 重合，即 A,C,O 三点共线.

3．设平面直角坐标系中点集

$\{P_1, P_2, \dots, P_{4n+1}\}=\{(x, y)\mid x, y$ 为整数, $|x|\leqslant n, |y|\leqslant n, xy=0\}$,

其中 *n* 为正整数．求 $(P_1P_2)^2+(P_2P_3)^2+\dots+(P_{4n}P_{4n+1})^2+(P_{4n+1}P_1)^2$ 的最小值.

解：$16n-8$.

首先构造一种满足条件的点集．若 n 为奇数，设 $n=2m+1$，令

$P_1(0,0),P_2(0,1),P_3(0,3),\dots,P_{m+2}(0,2m+1)$，$P_{m+3}(0,2m),P_{m+4}(0,2m-2),\dots,P_{2m+2}(0,2)$，$P_{2m+3}(1,0),P_{2m+4}(3,0),\dots,P_{3m+3}(2m+1,0)$，$P_{3m+4}(2m,0),P_{3m+5}(2m-2,0),\dots,P_{4m+3}(2,0)$，$P_{4m+4}(0,-1),P_{4m+5}(0,-3),\dots,P_{5m+4}(0,-2m-1)$，$P_{5m+5}(0,-2m),\dots,P_{6m+4}(0,-2)$，$P_{6m+5}(-1,0),\dots,P_{7m+5}(-2m-1,0)$，$P_{7m+6}(-2m,0),\dots,P_{8m+5}(-2,0)$．容易验证 $(P_1P_2)^2+\dots+(P_{4n+1}P_1)^2=16n-8$.

若 n 为偶数，设 $n=2m$，令 $P_1(0,0),P_2(0,1),P_3(0,3),...,P_{m+1}(0,2m-1),P_{m+2}(0,2m)$，$P_{m+3}(0,2m-2),P_{m+4}(0,2m-4),...,P_{2m+1}(0,2)$，$P_{2m+2}(1,0),P_{2m+3}(3,0),...,P_{3m+1}(2m-1)$，$P_{3m+2}(2m,0),P_{3m+3}(2m-2,0),...,P_{4m+1}(2,0)$，$P_{4m+2}(0,-1),...,P_{5m+1}(0,-2m+1)$，$P_{5m+2}(0,-2m),...,P_{6m+1}(0,-2)$，$P_{6m+2}(-1,0),...,P_{7m+1}(-2m+1,0),P_{7m+2}(-2m,0)$，$P_{7m+3}(-2m+2,0),...,P_{8m+1}(-2,0)$，容易验证 $(P_1P_2)^2+...+(P_{4n+1}P_1)^2=16n-8$.

下面证明，$16n-8$ 是最小的可能取值．首先证明一个引理：对于一条直线上的 n 个点 $x_i=i(i=1,2,...,n)$，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2\geq 4n-6$.

我们称满足 $x_{i-1}<x_i,x_{i+1}<x_i$ 的点 x_i 为“拐点”．显然，n 为拐点．若存在某个拐点 $x_k<n$，则可以交换 x_{k-1},x_k，这样得到的和

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2>\sum_{i=1}^{k-2}(x_i-x_{i+1})^2+(x_{k-2}-x_k)^2+(x_{k+1}-x_k)^2+(x_{k-1}-x_{k+1})^2+\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2$$

不是最小的，故使得 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2$ 最小的 x_i 的排列一定是单峰的，即只有 n 一个拐点．这样，设 $1=x_1<x_2<...<x_k=n>x_{k+1}>...>x_n$．若存在 $|x_i-x_{i+1}|=t\geq 3$，则由于 n 个点遍历了 $1,2,...,n$，在增减性相反的一侧必存在 $|x_j-x_{j+1}|<t$．这样，交换 x_i,x_j，容易验证调整后的平方和不增大．故使得 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2$ 最小的 x_i 的排列一定满足 $|x_i-x_{i+1}|\leq 2$．由于由增减性相反的两条首尾相接的序列构成，只可能存在两个 $|x_i-x_{i+1}|=1$，故

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})^2\geq 2^2(n-2)+1^2\cdot 2=2n-6$，引理得证.

回到原题．设 $P_i(x_i,y_i)$，

$\sum_{i=1}^{4n+1}(P_iP_{i+1})^2=\sum_{i=1}^{4n+1}((x_i-x_{i+1})^2+(y_i-y_{i+1})^2)=\sum_{i=1}^{4n+1}(x_i-x_{i+1})^2+\sum_{i=1}^{4n+1}(y_i-y_{i+1})^2$．而将 x 轴上的 $2n+1$ 个数分为非负的 $n+1$ 个数 $0,1,...,n$ 和非正的 $n+1$ 个数 $0,-1,...,-n$ 两部分．注意到 y 轴上的 $2n+1$ 个点是零点，如果 x 轴上的连线跨过零点，则对于最靠近零点的两个相邻坐标 $x_i>0,x_{i+1}<0$，有 $(x_i-x_{i+1})^2>x_i^2+x_{i+1}^2$，将零点调整为“中转站”更优．从而

$\sum_{i=1}^{4n+1}(x_i-x_{i+1})^2\geq\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-x_{i+1})^2+\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-x_{i+1})^2$，由引理，

$\sum_{i=1}^{4n+1}(x_i-x_{i+1})^2\geq 2(4(n+1)-6)=8n-4$．对 y 轴上的点类似讨论，可得

$\sum_{i=1}^{4n+1}(y_i-y_{i+1})^2\geq 8n-4$．故 $\sum_{i=1}^{4n+1}(P_iP_{i+1})^2\geq 2(8n-4)=16n-8$，命题得证.

4. 设平面上有 n 个点 $V_1,V_2,...,V_n$ $(n\geqslant 4)$，任意三点不共线，某些点之间连有线段．把

标号分别为 1, 2, …, n 的 n 枚棋子放置在这 n 个点处，每个点处恰有一枚棋子．现对这 n 枚棋子进行如下操作：每次选取若干枚棋子，将它们分别移动到与自己所在点有线段相连的另一个点处；操作后每点处仍恰有一枚棋子，并且没有两枚棋子在操作前后交换位置．若一种连线段的方式使得无论开始时如何放置这 n 枚棋子，总能经过有限次操作后，使每个标号为 k 的棋子在点 V_k 处，k=1, 2, …, n，则称这种连线段的方式为“和谐的”，求在所有和谐的连线段的方式中，线段数目的最小值．

解： $n+1$．

将平面上的点看作图论中的顶点，将有线段相连的两点之间连一条边．允许的操作方法是将图中某个环上的顶点依次轮换．由于开始时放置 n 枚棋子的方法共有 $n!$ 种，我们必须能通过有限次轮换达到这 $n!$ 种状态．

假设只有 n 条线段，则图中只存在一个环，至多只能形成 n 种不同状态，显然不满足 $n!$ 种的需要．

下面证明 $n+1$ 条线段是可行的．连接顶点 $V_iV_{i+1}(i=1,2,...,n)$ 和 V_1V_4（下标 $\bmod n$ 考虑），就存在一个 n 元环和一个 4 元环．我们可以先将 4 个顶点沿 n 元环转动到 4 元环的位置，再沿着 4 元环轮换调整，再将 n 元环反向转动回去，由此可以轮换调换任意 4 个连续元素的位置而不影响其他元素．

对于 5 元环 $1,2,3,4,5$，按照下列方法轮换调整：
$1,2,3,4,5\to 3,4,1,2,5\to 3,1,2,5,4\to 1,2,5,3,4$，这样 $3,4,5$ 变成了 $5,3,4$，而不影响其余元素的位置．这样就实现了 3 元环的调整，即将 3 个连续的元素任意排序．

利用 3 元环的调整，首先利用 V_1 及其后面的两个元素，将 V_1 调整到目标位置；再依次将 $V_2,V_3,...,V_{n-2}$ 调整到目标位置．若 V_{n-1},V_n 恰好是正确的顺序，则调整完毕；否则对 4 元环 $V_{n-3},V_{n-2},V_n,V_{n-1}$ 轮换调整为 $V_{n-1},V_{n-3},V_{n-2},V_n$，再对 3 元环 V_{n-1},V_{n-3},V_{n-2} 进行调整即可．

综上所述，至少需要连接 $n+1$ 条线段．

5．设实数 x,y,z 大于或等于 1，求证：

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\leqslant (xyz)^2-2xyz+2.$$

证明： 令 $a=x-1,b=y-1,c=z-1$，则 $a,b,c\ge 0$．

则原不等式转化为

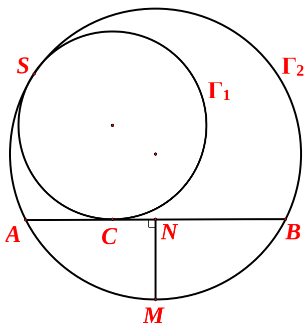
$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\le ((a+1)(b+1)(c+1))^2-2(a+1)(b+1)(c+1)+2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\le (2(a+1)(b+1)(c+1)-2+(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$
$$+2abc(ab+bc+ac+2a+2b+2c))-2(a+1)(b+1)(c+1)+2$$

而 $2abc(a+b+c+ab+bc+ac)\ge 0$ 显然成立，故当且仅当

至少一个 $a,b,c=0$，即至少一个 $x,y,z=1$ 时等号成立．

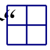
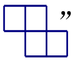
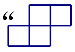
6．如图，圆 Γ_1，Γ_2 内切于点 S，圆 Γ_2 的弦 AB 与圆 Γ_1 相切于点 C，M 是弧 AB（不含点 S）的中点，过点 M 作 $MN\perp AB$，垂足为 N. 记圆 Γ_1 的半径为 r，求证：$AC\cdot CB=2r\cdot MN$.



证明：令 R 为大圆的半径，r 为小圆的半径．则有

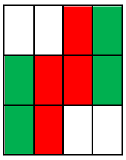
$$CN^2=2(R-r)MN+MN^2$$
$$BN^2=2R\cdot MN+MN^2$$

而 $AC\cdot CB=(BN+CN)(BN-CN)$，故 $AC\cdot CB=2r\cdot MN$.

7. 在一个 10×10 的方格表中有一个由 $4n$ 个 1×1 的小方格组成的图形，它既可被 n 个""型的图形覆盖，也可被 n 个""或""型（可以旋转）的图形覆盖．求正整数 n 的最小值．

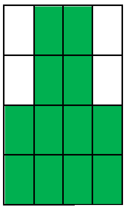
解： n 的最小值为 4.

当 $n=1$ 时，显然不成立；当 $n=2$ 时，若为 2×4 矩形显然不成立，若为下图形状



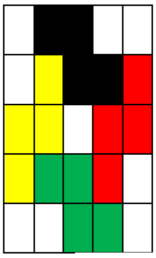
则中间的红色部分必为弯形，此时两侧的绿色部分无法覆盖．

当 $n=3$ 时，三个正方形，若为 2×6 矩形显然不成立；若存在两个正方形如上图所示放置，为了不出现上图所示的绿色情况，第三个正方形必须同时与两个绿色部分相邻，这是不可能的．因此只有下图所示的放置方法



这样，最上面的两个方格仍然无法同时覆盖，矛盾．故 $n\le 3$ 不可行．

对于 $n=4$ 的情况，我们给出一种构造：



这里四种颜色代表四个弯形的图形，四个正方形拼成"弦图"的形状，符合要求．

评注：事实上，当 $n=4,6,8,12,14,16,\ldots$ 时均满足题意．

8．设 $a_n=n\sqrt{5}-[n\sqrt{5}]$，求数列 a_1，a_2，…，a_{2009} 中的最大项和最小项，其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．

解： 令 $\{x\}=x-[x]$，则 $a_n=\{2n(\frac{1+\sqrt{5}}{2})\}$，令 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则考察 $2a,4a,...,4018a$．

由数学归纳法，易证 $a^{k+1}=F_k a+F_{k-1}$，其中 F_k 是斐波那契数，满足 $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}, F_0=F_1=1$．因此 $\{F_k a\}=\{a^{k+1}\}$．

注意到对所有正整数 n，$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ 为整数，而 $n\to\infty$ 时 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\to 0$，故偶数项 $\{a^2\},\{a^4\},...$ 趋近于 1，而奇数项 $\{a^3\},\{a^5\},...$ 趋近于 0．

由 Zeckendorf 定理，每个正整数可以表示为若干不同的非连续的斐波那契数之和，令 $2n=F_{k_1}+F_{k_2}+...+F_{k_r}$，其中 $k_1<k_2<...<k_r$，且 $k_i+1<k_{i+1}$．则 $\{2na\}=\{a^{k_1+1}+a^{k_2+1}+...+a^{k_r+1}\}$．

若使得 $\{2na\}$ 尽可能大，须使得 k_1 为尽可能大的奇数，此时 $\{a^{k_1+1}\}\to 1$，而 $k_2,k_3,...$ 为偶数，这样 $\{a^{k_2+1}\},\{a^{k_3+1}\},...\to 0$，使得 $\{2na\}\to 1$．此时由等比数列求和公式可以证明 $\{2na\}<1$．假设存在 k_i,k_j 同时为奇数，则 $\{a^{k_i+1}+a^{k_j+1}\}<\{a^{k_i+1}\}$，不如只选 k_i．假设 k_1 不为最大的奇数，则设 k 为最大的可能奇数，有 $\{a^{k_1+1}+a^{k_1+4}+a^{k_1+6}+...+a^{k+1}\}<\{a^k\}$，非最大值．因此当 $n\le 2009$ 时，取最大的斐波那契数 $2n=F_{17}=2584$，此时 $n=1292$．

若使得 $\{2na\}$ 尽可能小，类似的须使得 k_1 为尽可能大的偶数，而 $k_2,k_3,...$ 为奇数．此时由于 $2n=F_{16}=1597$ 不能选择，故取 $k_1=14$，最大的不相邻斐波那契数之和 $2n=F_{14}+F_{17}=3194$，即 $n=1597$．

10.7　2009 中国数学奥林匹克

一、给定锐角三角形 *PBC*，$PB\neq PC$. 设 *A*，*D* 分别是边 *PB*，*PC* 上的点，连接 *AC*，*BD*，相交于点 *O*. 过点 *O* 分别作 $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别为 *E*，*F*，线段 *BC*，*AD* 的中点分别为 *M*，*N*.

（1）若 *A*，*B*，*C*，*D* 四点共圆，求证：$EM\cdot FN=EN\cdot FM$；

（2）若 $EM\cdot FN=EN\cdot FM$，是否一定有 *A*，*B*，*C*，*D* 四点共圆？证明你的结论.

解（1）设 *Q*，*R* 分别是 *OB*，*OC* 的中点，连接 *EQ*，*MQ*，*FR*，*MR*，则

$$EQ=\frac{1}{2}OB=RM,\ MQ=\frac{1}{2}OC=RF,$$

又 *OQMR* 是平行四边形，所以

$$\angle OQM=\angle ORM,$$

由题设 *A*，*B*，*C*，*D* 四点共圆，所以

$$\angle ABD=\angle ACD,$$

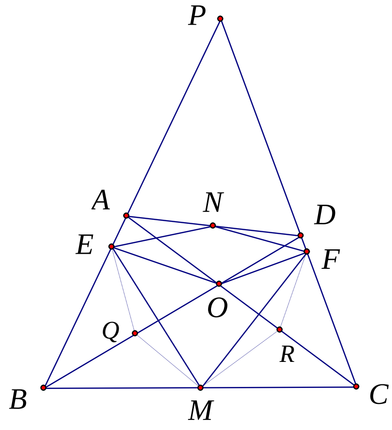


图 1

于是

$$\angle EQO=2\angle ABO=2\angle ACO=\angle FRO,$$

所以

$$\angle EQM=\angle EQO+\angle OQM=\angle FRO+\angle ORM=\angle FRM,$$

故

$$\triangle EQM\cong\triangle MRF,$$

所以　　$EM=FM$，

同理可得　　$EN=FN$，

所以　　$EM\cdot FN=EN\cdot FM$.

（2）答案是否定的.

当 $AD\parallel BC$ 时，由于 $\angle B\neq\angle C$，所以 *A*，*B*，*C*，*D* 四点不共圆，但此时仍然有 $EM\cdot FN=EN\cdot FM$，证明如下：

如图 2 所示，设 *S*，*Q* 分别是 *OA*，*OB* 的中点，连接 *ES*，*EQ*，*MQ*，*NS*，则

$$NS=\frac{1}{2}OD,\ EQ=\frac{1}{2}OB,$$

所以 $$\frac{NS}{EQ}=\frac{OD}{OB}.$$ ①

又 $ES=\frac{1}{2}OA$，$MQ=\frac{1}{2}OC$，所以

$$\frac{ES}{MQ}=\frac{OA}{OC}.$$ ②

而 $AD/\!/BC$，所以

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB},$$ ③

由①，②，③得 $$\frac{NS}{EQ}=\frac{ES}{MQ}.$$

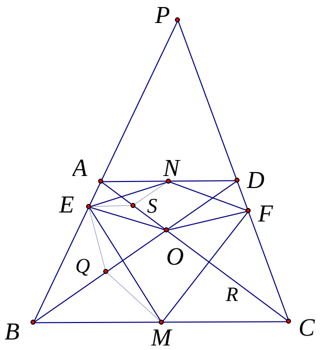
因为 [illegible]，

[illegible]

[illegible]，

即 [illegible]，

所以 $$\Delta NSE\sim\Delta EQM,$$



故 $$\frac{EN}{EM}=\frac{SE}{QM}=\frac{OA}{OC}$$（由②）.

同理可得， $$\frac{FN}{FM}=\frac{OA}{OC},$$

所以 $$\frac{EN}{EM}=\frac{FN}{FM},$$

从而 [illegible].

分析 当然，CMO 的试题不是容易解出的，这里也难以给出一种方法能够“秒杀”。但本题的思路仍然是寻找边角关系，证明三角形相似，得出四点共圆。注意，本题的解答并没有用到梅涅劳斯定理、赛瓦定理等，只是用了初中最基础的知识，这也是今后平面几何试题的命题方向。抓住基本特征，从小处着眼，对“边角关系”敏感，才能解决此类问题。

二、求所有的素数对（p，q），使得 $pq\mid 5^p+5^q$.

解：若 $2\mid pq$，不妨设 $p=2$，则 $2q\mid 5^2+5^q$，故 $q\mid 5^q+25$.

由 Fermat 小定理， $q\mid 5^q-5$，得 $q\mid 30$，即 $q=2,3,5$. 易验证素数对 $(2,2)$ 不合要

求，$(2,3)$，$(2,5)$合乎要求.

若 pq 为奇数且$5\mid pq$，不妨设 $p=5$，则$5q\mid 5^5+5^q$，故$q\mid 5^{q-1}+625$.

当$q=5$时素数对$(5,5)$合乎要求，当$q\neq 5$时，由 Fermat 小定理有$q\mid 5^{q-1}-1$，故$q\mid 626$. 由于q为奇素数，而 626 的奇素因子只有 313，所以$q=313$. 经检验素数对$(5,313)$合乎要求.

若 p,q 都不等于 2 和 5，则有$pq\mid 5^{p-1}+5^{q-1}$，故

$$5^{p-1}+5^{q-1}\equiv 0 \pmod p. \qquad ①$$

由 Fermat 小定理，得
$$5^{p-1}\equiv 1 \pmod p, \qquad ②$$
故由①，②得

$$5^{q-1}\equiv -1 \pmod p. \qquad ③$$

设$p-1=2^k(2r-1)$，$q-1=2^l(2s-1)$，其中k,l,r,s为正整数.

若$k\le l$，则由②，③易知

$$1\equiv\left(5^{p-1}\right)^{2^{l-k}(2s-1)}=5^{2^l(2r-1)(2s-1)}=\left(5^{q-1}\right)^{2r-1}\equiv(-1)^{2r-1}\equiv -1 \pmod p,$$

这与$p\neq 2$矛盾！所以$k>l$.

同理有$k<l$，矛盾！即此时不存在合乎要求的(p,q).

综上所述，所有满足题目要求的素数对(p,q)为

$(2,3)$，$(3,2)$，$(2,5)$，$(5,2)$，$(5,5)$，$(5,313)$及$(313,5)$.

分析 本题与几位信息学竞赛同学讨论，他们很快就得出了除（5，313）和（313，5）之外的解。这启示我们，做难题之前一定要运用本文的“试探法”，将“平凡解”观察出来，以便证明。证明时，往往是较小的情况容易出现特例，应分类讨论。在关于素数的证明中，应抓住奇偶性，因为素数中只有一个为 2；在本题关于 5 的次幂中，应关注 mod 5，便于应用费马小定理。当然，也应考虑 mod p，由于结论是能被 pq 整除。在证明中，将偶数的 2 的次幂全部提出来，只留下奇数，利于分析奇偶性问题。这样，本题解法都是有根据的，也就不显得如此“神秘”了，只需要反复试探。

三、设 m，n 是给定的整数，$4<m<n$，$A_1A_2\cdots A_{2n+1}$是一个正 $2n+1$ 边形，$P=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$. 求顶点属于 P 且恰有两个内角是锐角的凸 m 边形的个数.

解 先证一个引理：顶点在 P 中的凸 m 边形至多有两个锐角，且有两个锐角时，这两个锐角必相邻.

事实上，设这个凸 m 边形为 $P_1P_2\cdots P_m$，只考虑至少有一个锐角的情况，此时不妨设 $\angle P_mP_1P_2<\frac{\pi}{2}$，则

$$\angle P_2P_jP_m=\pi-\angle P_2P_1P_m>\frac{\pi}{2}\ (3\le j\le m-1),$$

更有 $\angle P_{j-1}P_jP_{j+1}>\frac{\pi}{2}\ (3\le j\le m-1)$.

而 $\angle P_1P_2P_3+\angle P_{m-1}P_mP_1>\pi$，故其中至多一个为锐角，这就证明了引理.

由引理知，若凸 m 边形中恰有两个内角是锐角，则它们对应的顶点相邻.

在凸 m 边形中，设顶点 A_i 与 A_j 为两个相邻顶点，且在这两个顶点处的内角均为锐角. 设 A_i 与 A_j 的劣弧上包含了 P 的 r 条边（$1\le r\le n$），这样的 $(i,\ j)$ 在 r 固定时恰有 $2n+1$ 对.

（1）若凸 m 边形的其余 $m-2$ 个顶点全在劣弧 A_iA_j 上，而 A_iA_j 劣弧上有 $r-1$ 个 P 中的点，此时这 $m-2$ 个顶点的取法数为 C_{r-1}^{m-2}.

（2）若凸 m 边形的其余 $m-2$ 个顶点全在优弧 A_iA_j 上，取 A_i，A_j 的对径点 B_i，B_j，由于凸 m 边形在顶点 A_i，A_j 处的内角为锐角，所以，其余的 $m-2$ 个顶点全在劣弧 B_iB_j 上，而劣弧 B_iB_j 上恰有 r 个 P 中的点，此时这 $m-2$ 个顶点的取法数为 C_r^{m-2}.

所以，满足题设的凸 m 边形的个数为

$$\begin{aligned}(2n+1)\sum_{r=1}^{n}\left(C_{r-1}^{m-2}+C_r^{m-2}\right)&=(2n+1)\left(\sum_{r=1}^{n}C_{r-1}^{m-2}+\sum_{r=1}^{n}C_r^{m-2}\right)\\&=(2n+1)\left(\sum_{r=1}^{n}\left(C_r^{m-1}-C_{r-1}^{m-1}\right)+\sum_{r=1}^{n}\left(C_{r+1}^{m-1}-C_r^{m-1}\right)\right)\\&=(2n+1)\left(C_{n+1}^{m-1}+C_n^{m-1}\right).\end{aligned}$$

分析 解答本题，提出“引理”是关键。在真正做题时，会首先考虑，锐角的个数都有哪些可能，我们经试验发现三个以上锐角不可能，于是着手证明引理。从直观上想，若有三个内角为锐角，则一定交于正多边形内。于是，从角度和与 90°的关系考虑，得到至多两角为锐角，且锐角相邻。假设一角为锐角，是证明引理的突破口。下面按所在优劣弧位置分类讨论，利用组合数再求和即得。这里利用锐角，取两点的对径点，限制范围是巧妙的。

四、给定整数 $n\ge 3$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\min\limits_{1\le i<j\le n}\left|a_i-a_j\right|=1$. 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^3$ 的最小值.

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则对 $1\le k\le n$，有

$$\left|a_k\right|+\left|a_{n+1-k}\right|\ge\left|a_{n+1-k}-a_k\right|\ge\left|n+1-2k\right|,$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^3+|a_{n+1-k}|^3\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|a_{n+1-k}|\right)\left(\frac{3}{4}\left(|a_k|-|a_{n+1-k}|\right)^2+\frac{1}{4}\left(|a_k|+|a_{n+1-k}|\right)^2\right)$$

$$\geq\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|a_{n+1-k}|\right)^3\geq\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3.$$

当 n 为奇数时， $$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3=2\cdot2^3\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}i^3=\frac{1}{4}(n^2-1)^2.$$

当 n 为偶数时， $$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3=2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i-1)^3$$

$$=2\left(\sum_{j=1}^{n}j^3-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i)^3\right)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n^2-2).$$

所以，当 n 为奇数时，$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3\geq\frac{1}{32}(n^2-1)^2$，当 n 为偶数时，

$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3\geq\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$，等号均在 $a_i=i-\frac{n+1}{2},i=1,2,\cdots,n$ 时成立.

因此，$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值为 $\frac{1}{32}(n^2-1)^2$（n 为奇数），或者 $\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$（n 为偶数）.

分析 本题的意思是，找到 n 个实数，按照大小排序，相邻两个之差不小于 1，至少有一个差为 1，求它们绝对值的立方和的最小值。这里由于条件是对称式，先排序可以大大简化问题。显然，这些实数应当尽可能接近 0，故相邻两个之差最好均为 1. 这些实数应在原点正负平均分布，使得最大的尽可能小，于是对 2m+1 个数，取中间数为零，为 -m,-m+1 ,...0,1...m 等差数列。对 2m 个数，取中间两数为-½,½,两侧仍然成公差为 1 的等差数列。这样，答案已经求出，只需从数学上证明其最小性。首先，以距离 0 最近的数为基准，论证相邻两个差越小越好，否则后面的数绝对值增大；然后，证明尽量正负平均分布，对这个等差数列先求出和的表达式，再以首项为自变量，求函数最值。这种方法思路自然、解决简便，比上面给出的标准解法也许更易于理解。

类似题目：1990 年 CMO，设 $a_1,a_2,\ldots a_n(n\geq2)$ 是 n 个互不相同的实数，

$S=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}$. $M=\min(a_i-a_j)^2$ 求证：$\frac{S}{M}\geq\frac{n(n^2-1)}{12}$.

五、凸 n 边形 P 中的每条边和每条对角线都被染为 n 种颜色中的一种颜色．问：对怎样的 n，存在一种染色方式，使得对于这 n 种颜色中的任何 3 种不同颜色，都能找到一个三角形，其顶点为多边形 P 的顶点，且它的 3 条边分别被染为这 3 种颜色？

解　当 $n\geq 3$ 为奇数时，存在合乎要求的染法；当 $n\geq 4$ 为偶数时，不存在所述的染法。

每 3 个顶点形成一个三角形，三角形的个数为 C_n^3 个，而颜色的三三搭配也刚好有 C_n^3 种，所以本题相当于要求不同的三角形对应于不同的颜色组合，即形成一一对应．

我们将多边形的边与对角线都称为线段．对于每一种颜色，其余的颜色形成 C_{n-1}^2 种搭配，所以每种颜色的线段（边或对角线）都应出现在 C_{n-1}^2 个三角形中，这表明在合乎要求的染法中，各种颜色的线段条数相等．所以每种颜色的线段都应当有 $\dfrac{C_n^2}{n}=\dfrac{n-1}{2}$ 条．

当 n 为偶数时，$\dfrac{n-1}{2}$ 不是整数，所以不可能存在合乎条件的染法．下设 $n=2m+1$ 为奇数，我们来给出一种染法，并证明它满足题中条件．自某个顶点开始，按顺时针方向将凸 $2m+1$ 边形的各个顶点依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{2m+1}$．对于 $i\notin\{1,2,\cdots,2m+1\}$，按 $\bmod(2m+1)$ 理解顶点 A_i．再将 $2m+1$ 种颜色分别记为颜色 $1,2,\cdots,2m+1$．

将边 A_iA_{i+1} 染为颜色 i，其中 $i=1,2,\cdots,2m+1$．再对每个 $i=1,2,\cdots,2m+1$，都将线段（对角线）$A_{i-k}A_{i+1+k}$ 染为颜色 i，其中 $k=1,2,\cdots,m-1$．于是每种颜色的线段都刚好有 m 条．注意，在我们的染色方法之下，线段 $A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色，当且仅当

$$i_1+j_1\equiv i_2+j_2\pmod{2m+1}.\qquad ①$$

因此，对任何 $i\not\equiv j\pmod{2m+1}$，任何 $k\not\equiv 0\pmod{2m+1}$，线段 A_iA_j 都不与 $A_{i+k}A_{j+k}$ 同色．换言之，如果

$$i_1-j_1\equiv i_2-j_2\pmod{2m+1}.\qquad ②$$

则线段 $A_{i_1}A_{j_1}$ 都不与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色．

任取两个三角形 $\Delta A_{i_1}A_{j_1}A_{k_1}$ 和 $\Delta A_{i_2}A_{j_2}A_{k_2}$，如果它们之间至多只有一条边同色，当然它们不对应相同的颜色组合．如果它们之间有两条边分别同色，我们来证明第 3 条边必不同颜色．为确定起见，不妨设 $A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色．

情形 1：如果 $A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $A_{j_2}A_{k_2}$ 也同色，则由①知

$$i_1+j_1\equiv i_2+j_2 \pmod{2n+1},$$

$$j_1+k_1\equiv j_2+k_2 \pmod{2n+1},$$

将二式相减，得 $i_1-k_1\equiv i_2-k_2 \pmod{2n+1}$，故由②知 $A_{k_1}A_{i_1}$ 不与 $A_{k_2}A_{i_2}$ 同色．

情形 2：如果 $A_{i_1}A_{k_1}$ 与 $A_{i_2}A_{k_2}$ 也同色，则亦由①知

$$i_1+j_1\equiv i_2+j_2 \pmod{2n+1},$$

$$i_1+k_1\equiv i_2+k_2 \pmod{2n+1},$$

将二式相减，亦得 $j_1-k_1\equiv j_2-k_2 \pmod{2n+1}$，亦由②知 $A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $A_{j_2}A_{k_2}$ 不同色．总之，$\Delta A_{i_1}A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $\Delta A_{i_2}A_{j_2}A_{k_2}$ 对应不同的颜色组合．

分析 对于染色的可能性问题，往往是分奇偶讨论，有相反的结果。再经过简单的试算，问题的答案已经“水落石出”。本题要求的显然是找到一种一一对应关系，对这种问题的处理我们已有先例。首先将顶点标号，再利用取模判断颜色。由对称性，容易想到各种颜色的条数相等，从而求出每种颜色的条数，立即排除 n 为偶数的情况。下面就是对 n 是奇数的情况进行构造。由于对称性，n 条边一定是分别染 n 种颜色，对角线的染法一定与边相关。首先考虑一种常见的染法，就是将与该点距离在一定范围内的边全部染成该边的颜色，但对本题并不适用，因为这样会出现两边同色的三角形。为了保证每个三角形三边异色，在染某种颜色时，要使得所有线段没有公共顶点。由于要染(n-1)/2 条线段，只有一个点被剩下，由对称性，显然是多边形的边所对顶点。其他顶点对称分布，容易想到所有同色边平行的染法。经验证，这种方法符合题意。如果用计算机真正画出图来，也是非常和谐美观的。

相关试题：从正 n 边形的一个顶点出发，每次沿直线走向另一个顶点，所有顶点经过且只经过一次，最后回到出发点。问能否找到一条折线路径，使得每两条线段互不平行？

六、给定整数 $n\geq 3$，证明：存在 n 个互不相同的正整数组成的集合 S，使得对 S 的任意两个不同的非空子集 A，B，数

$$\frac{\sum_{x\in A} x}{|A|} \quad 与 \quad \frac{\sum_{x\in B} x}{|B|}$$

是互素的合数．（这里 $\sum_{x\in X} x$ 与 $|X|$ 分别表示有限数集 X 的所有元素之和及元素个数．）

证 我们用 $f(X)$ 表示有限数集 X 中元素的算术平均．

第一步，我们证明，正整数的 n 元集合 $S_1=\{n!,2\cdot n!,\cdots,n\cdot n!\}$ 具有下述性质：对 S_1 的任意两个不同的非空子集 A，B，有 $f(A)\neq f(B)$．

证明：对任意 $A\subseteq S_1$，$A\neq\varnothing$，设正整数 k 满足

$$k!\le f(A)<(k+1)!,\qquad ①$$

并设 l 是使 $lf(A)\ge(k+1)!$ 的最小正整数．我们首先证明必有 $|A|=l$．

事实上，设 $(k'+1)!$ 是 A 中最大的数，则由 $A\subseteq S_1$，易知 A 中至多有 k' 个元素，即 $|A|\le k'$，故 $f(A)\ge\dfrac{(k'+1)!}{k'}>k'!$．又由 $f(A)$ 的定义知 $f(A)\le(k'+1)!$，故由①知 $k=k'$．特别地有 $|A|\le k$．

此外，显然 $|A|f(A)\ge(k'+1)!=(k+1)!$，故由 l 的定义可知 $l\le|A|$．于是我们有 $l\le|A|\le k$．

若 $l=k$，则 $|A|=l$；否则有 $l\le k-1$，则

$$(l+1)f(A)=\left(1+\frac{1}{l}\right)lf(A)\ge\left(1+\frac{1}{k-1}\right)(k+1)!$$

$$>(k+1)!+k!+\cdots+2!.$$

由于 $(k+1)!$ 是 A 中最大元，故上式表明 $|A|<l+1$．结合 $|A|\ge l$ 即知 $|A|=l$．

现在，若有 S_1 的两个不同的非空子集 A，B，使得 $f(A)=f(B)$，则由上述证明知 $|A|=|B|=l$，故 $|A|f(A)=|B|f(B)$，但这等式两边分别是 A，B 的元素和，利用 $(n+1)!>n!+\cdots+2!$ 易知必须 $A=B$，矛盾．

第二步，设 K 是一个固定的正整数，$K>n\max\limits_{A\subseteq S_1}f(A)$，我们证明，对任何正整数 x，正整数的 n 元集合 $S_2=\{K\cdot n!\cdot x\cdot a+1\mid a\in S_1\}$ 具有下述性质：对 S_2 的任意两个不同的非空子集 A，B，数 $f(A)$ 与 $f(B)$ 是两个互素的整数．

事实上，由 S_2 的定义易知，有 S_1 的两个子集 A_1,B_1，满足 $|A_1|=|A|$，$|B_1|=|B|$，且

$$f(A)=K\cdot n!\cdot x\cdot f(A_1)+1,\quad f(B)=K\cdot n!\cdot x\cdot f(B_1)+1.\qquad ②$$

显然 $n!f(A_1)$ 及 $n!f(B_1)$ 都是整数，故由上式知 $f(A)$ 与 $f(B)$ 都是正整数．

现在设正整数 d 是 $f(A)$ 与 $f(B)$ 的一个公约数，则 $n!f(A)f(B_1)-n!f(B)f(A_1)$ 是 d 的倍数，故由②可知 $d\mid n!f(A_1)-n!f(B_1)$，但由 K 的选取及 S_1 的构作可知，

$\left|nf(A_1)-nf(B_1)\right|$是小于 K 的非零整数，故它是 $K!$ 的约数，从而 $d\mid K!$．再结合 $d\mid f(A)$ 及②可知 d=1，故 $f(A)$ 与 $f(B)$ 互素．

第三步，我们证明，可选择正整数 x，使得 S_2 中的数都是合数．由于素数有无穷多个，故可选择 n 个互不相同且均大于 K 的素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$．将 S_1 中元素记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 $\left(p_i, K\alpha_i\right)=1\ (1\le i\le n)$，且 $\left(p_i^2, p_j^2\right)=1$（对 $1\le i<j\le n$），故由中国剩余定理可知，同余方程组

$$K\alpha_i x\equiv -1 \pmod{p_i^2},\ i=1,2,\cdots,n,$$

有正整数解．

任取这样一个解 x，则相应的集合 S_2 中每一项显然都是合数．结合第二步的结果，这一 n 元集合满足问题的全部要求．

分析 笔者认为，这是 2009CMO 难度最大的一道试题，也是唯一一道技巧性较高的试题。本题的意思是，对确定的 n，构造一个集合 S，使得它的任何一个子集的元素的平均值均为合数，且没有公共质因子。本题的证明过程分三步，首先构造平均值不同的，然后构造没有公共质因子的，最后构造合数，层层深入，逐步逼近原命题，这是解决要求较多的构造性问题的重要方法。本题解答的亮点在于：①利用阶乘，保证整数 ②设出最大元，极端值原理 ③利用加 1，使公约数为 1 ④选取 K，使得都是它的约数 ⑤利用素数的无限性，解同余方程。本题的解答并未给出具体的集合，但给出了一种构造集合的算法，有些信息学竞赛题的味道。

小结 2009 年 CMO 试题与往年比较，难度大大降低，于是出现了 11 个满分。这样的试题无论题目本身还是解题方法都是有规律可循的，在“经典题”中能找到它们的身影，思路较为自然，不像往年那样有很多绝妙的构造。运用本文的“抢分”策略，加上平时解题技巧、数学模型的积累，这样的试题拿高分应该不是难以做到的。

10.9　2008 国际数学奥林匹克

第 49 届 IMO，中国代表队取得了总分第一名的好成绩。事实上，IMO 的试题要比 CMO 略简单，虽然 2009 年 CMO 出了简单题，但往年都是如此。并且 IMO 试题经常是数学中的经典问题，看起来往往比较“和谐”，和谐之美背后隐藏的，往往是巧妙的规律与方法。这就为我们在 IMO 试题中“抢分”提供了可能。

这里给出题目的英文原文和汉语翻译，并给出“分析”。具体解答请参考《中等数学》。

Problem 1　Let H be the orthocenter of an acute-angled triangle ABC。The circle Γ Acentered at the midpoint of BC and passing through H intersects the sideline BC at points A1and A2。Similarly，define the points B_1，B_2，C_1 and C_2。

Prove that six points A_1，A_2，B_1，B_2，C_1 and C_2 are concyclic。

设 H 是锐角△ABC 的垂心。以 BC 的中点为圆心且经过 H 的圆交 BC 于点 A1、A2；类似地，定义 B1、B2，C1、C2。

求证：A1、A2、B1、B2、C1、C2 这六点共圆。

分析 本题比 CMO2009 试题的平面几何简单，还是圆内的边角关系、四点共圆，关键一步是切割线定理的应用。利用垂直平分线较为巧妙，沟通了边的相等关系。

Problem 2　(i)If x，y and z are real numbers，different from 1，such that xyz＝1。

prove that $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}+\dfrac{y^2}{(y-1)^2}+\dfrac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$.

(ii) Prove that equality case is achieved for infinitely many triples of rational numbers x，y and z。

（i）均不为 1 的实数 x、y、z 满足 xyz＝1，求证 $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}+\dfrac{y^2}{(y-1)^2}+\dfrac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$。

（ii）求证有无穷多组三元有理数数组(x，y，z)使得上式的等号成立。

分析 在本文前面部分，已经介绍了“调整法”解此题的办法。这里还可以采用整体代换法，转为条件 $abc=(a-1)(b-1)(c-1)$, 待证命题为 $a^2+b^2+c^2\geq 1$. 用简单的恒等变形即可。第二问用到了巧妙的构造，有一定难度。

应当注意，在解决不等式类题目时，不要忙于应用著名不等式，应该先考虑恒等变形和代数放缩，因为那些著名不等式容易“放过头”，而恒等变形可以保留原有的不等关系，同时使特征更明显。在每一步放缩时，应当代入数值检查放缩是否“放过头”。

Problem 3　Prove that there are infinitely many positive integers n such that n^2+1 has a prime divisor greater than $2n+\sqrt{2n}$。

求证存在无穷多个正整数 n，使得 n^2+1 有一个大于 $2n+\sqrt{2n}$ 的质因子。‘

分析 与 CMO2009 试题有异曲同工之妙，也是构造数的阶乘，由于需要根号，考虑使用平方，此处选取 $n\equiv \pm m!\ (\mathrm{mod}\ p)$ 使得平方恰好$\equiv -1 \bmod p$，从而其 4 倍≥p-4，（4 倍是为了开方后结论中的 2）获得大小关系，解得结论。

Problem 4　Find all functions f : (0，∞)→(0，∞) (so, f is a function from the positive real numbers to the positive real numbers) such that $\dfrac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)}=\dfrac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$ for all positive real numbers w, x, y, z, satisfying wx＝yz。

求所有的正实函数 f : (0，∞)→(0，∞)，使得对所有满足 wx＝yz 的正实数 w，x，y，z，$\dfrac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)}=\dfrac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$.

分析 本题没有特别出彩的地方，首先可以猜出结论，主要是将各种特殊值反复代入，得出各种关系，即可解出 f(x)。这里首先代入最特殊的 1，然后代入 $w=y, x=z$，再代入 $y=z=\sqrt{wx}$，从特殊到一般，最终解出两组“平凡解”。

Problem 5 Let n and k be positive integers with k≥n and k－n an even number. Let 2n lamps labelled 1，2，……，2n be given, each of which can be either on or off. Initially all the lamps are off。We consider sequences of steps: at each step one of the lamps is switched (from on to off or from off to on)。Let N be the number of such sequences consisting of k steps and resulting in the state where lamps 1 through n are all on, and lamps n＋1 through 2n are all off。Let M be the number of such sequences consisting of k steps, resulting in the state where lamps 1 through n are all on, and lamps n＋1 through 2n are all off, but where none of the lamps n＋1 through 2n is ever switched on。Determine the ratio $\dfrac{N}{M}$。

设 n 和 k 是正整数，k≥n，且 k－n 是一个偶数。2n 盏灯依次编号为 1，2，……，2n，每一盏灯可以“开”和“关”。开始时，所有的灯都是“关”的。对这些灯可进行操作，每一次操作只改变其中的一盏灯的开关状态（即“开”变成“关”，“关”变成“开”），我们考虑长度为 k 的操作序列，序列中的第 i 项就是第 i 次操作时被改变开关状态的那盏灯的编号。设 N 是 k 次操作后使得灯 1，2，……，n 是“开”的，灯 n＋1，……，2n 是“关”的状态的所有不同的操作序列的个数。设 M 是 k 次操作后使得灯 1，2，……，n 是“开”的，灯 n＋1，…，2n 是“关”的，但是灯 n＋1，…，2n 始终没有被开过的所有不同的操作序列的个数。求比值 $\dfrac{N}{M}$。

分析 这道题有较大的难度，十分符合本文“二进制”一节的主题思想。只有开、关两种状态的序列，又涉及到变换，可用二进制数来表示。在张瑞祥的解答中，首先证明了一个引理，求出二进制数中各位奇偶性的个数。下面的讨论结合二进制数位，具有技巧性。然后按题意分为两类，并建立一一对应，最后运用组合计数即可。这里又用到了二进制数的整体移位，实际上就是关于 2^n 的运算。

类似题目：第 34 届 IMO 第 6 题，同样是开关灯用二进制表示，转化为二进制加法解决。此题的巧妙之处在于，先进行小规模的构造，再用数学归纳法证明。

Problem 6 Let ABCD be a convex quadrilateral with |BA|≠|BC|。Denote the incircles of triangles ABC and ADC by ω_1 and ω_2 respectively。Suppose that there exists a circle ω tangent to the ray BA beyond A and to the ray BC beyond C, which is also tangent to the lines AD and CD。

Prove that the common external tangents of ω_1 and ω_2 intersect on。

在凸四边形 ABCD 中，BA≠BC。ω_1 和 ω_2 分别是△ABC 和△ADC 的内切圆。假设存在

一个圆 ω 与射线 BA 相切（切点不在线段 BA 上），与射线 BC 相切（切点不在线段 BC 上），且与直线 AD 和直线 CD 都相切。证明：圆 ω_1 和 ω_2 的两条外公切线的交点在圆 ω 上。

分析 本题较为困难，牟晓生的解答用到了两个引理，主要运用了位似变换。其中引理是通用的性质。①ABCD 为凸四边形，圆 O 与射线 BA、BC 相切，与直线 AD、CD 相切，则 AB+AD=CB+CD。②设$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$的半径两两不等，则它们的位似中心共线。

10.10 2009 国际数学奥林匹克

第一天

1. n 是一个正整数，设 a[1],a[2],...,a[k] (k≥2) 是 k 个不同的属于 {1,2,...,n} 的正整数，满足 n 整除 a(a[i+1]-1) 对任意 i=1,2,...,k-1 成立。

证明：n 不整除 a[k](a[1]-1)。

2. 设三角形 ABC 的外心为 O 。点 P,Q 分别是线段 CA,AB 上的点。设 K,L,M 分别是线段 BP,CQ,PQ 的中点。

如果直线 PQ 与 三角形 KLM 的外接圆相切，证明 OP=OQ 。

3. 设 s[1],s[2],s[3],...... 是一个严格单调递增的正整数数列，满足其子数列 s[s[1]],s[s[2]],s[s[3]],...... 和 s[s[1]+1],s[s[2]+1],s[s[3]+1],...... 都是等差数列。

证明数列 s[1],s[2],s[3],......也是一个等差数列。

第二天

4. 在三角形 ABC 中， AB=AC ， ∠CAB 和 ∠CBA 的角平分线分别交 BC,AC 于点 D,E 。

设 K 是三角形 ACD 的内心， ∠BEK=45° ，求 ∠BAC 。

5. 求所有正整数集到正整数集的映射 f ，满足对任意正整数 a,b ，

存在一个非退化的三角形其三边长为 a,f(b),f(b+f(a)-1) 。

6. 设 a[1],...,a[n] 是 n 个互不相同的正整数， M 是一个不包含 s=a[1]+a[2]+...+a[n] 的 n-1 元正整数集。

一只蚱蜢在实轴上跳跃，它从 0 点开始，向右跳跃 n 次，其长度为 a[1],a[2],...,a[n] 的一个排列。

证明：存在一种跳法，使得蚱蜢不落在任何一个 M 中的点上。

1. 证明：反证法，反设 n|a[k](a[1]-1)

引理：n|a(b-1) n|b(c-1) => n|ab(c-1)-(c-1)a(b-1)=a(c-1)

因此，只要考虑 k=2 的情形就足够了，n|a[1](a[2]-1) n|a[2](a[1]-1) => n|a[1](a[2]-1)-a[2](a[1]-1)=a[1]-a[2]，这和 a[1]，a[2]是不同的属于 {1,2,...,n} 的正整数矛盾。

2. 证明：延长 OP 交 ABC 外接圆于 P1，P2，延长 OQ 交 ABC 外接圆于 Q1，Q2，不失一般性可以假设 P1，Q1 分别是离 P，Q 较近的交点。

PQ 于 KLM 外接圆相切 => 角 LKM = 角 LMP = 角 QPA 和 角 KLM = 角 KMQ = 角 PQA => APQ 与 MKL 相似 => AP/AQ = MK/ML = QB/PC => AP*PC = AQ*BQ。由于 PP1*PP2 = AP*PC 和 QQ1*QQ2 = AQ*QB，所以 PP1*PP2 = QQ1*QQ2。而 PP1+PP2 与 QQ1+QQ2 都等于 ABC 外接圆直径，于是 PP1 = QQ1，从而 OP = OQ

3. 证明：首先 s[k+1]-s[k] 是有界的，有下届由 s[k] 严格单调递增显然，加入没有上界，那么 s[s[k+1]]-s[s[k]] >= s[k+1]-s[k] 也无上界，和 s[s[k]] 是等差数列矛盾。

另一方面，s[s[k]] 和 s[s[k]+1]这两个等差数列的公差相等，否则如果前者公差较大，当 k 足够大可以推出 s[s[k] > s[s[k]+1]，如果后者公差较大，则可以推出 s[s[k]+1] > s[s[k+1]]，与 s[k]的严格单调性矛盾。因此，我们进一步可以得到 s[s[k]+1]-s[s[k]] 是常数。

现在假设 s[m+1]-s[m] = a 和 s[n+1]-s[n] = b 分别是 s[k+1]-s[k] 的最大最小值，那么 a >= b 而且

s[s[m+1]]-s[s[m]] = (s[s[m+1]] -s[s[m+1]-1]) + (s[s[m+1]-1] - s[s[m+1]-2]) + ... + (s[s[m]+1]

$- s[s[m]]) >= (a-1)b + (s[s[m]+1] - s[s[m]])$

$s[s[n+1]]-s[s[n]] = (s[s[n+1]] -s[s[n+1]-1]) + (s[s[n+1]-1] - s[s[n+1]-2]) + ... + (s[s[n]+1] - s[s[n]]) <= (b-1)a + (s[s[m]+1] - s[s[m]])$

由 $s[s[m+1]]-s[s[m]] = s[s[n+1]]-s[s[n]]$ 和 $(s[s[m]+1] - s[s[m]]) = (s[s[n]+1] - s[s[n]])$ 我们可以推出 $(b-1)a >= (a-1)b$，从而 $b >= a$，这说明 $a = b$，也就是 $s[k]$是等差数列

4. 证明：假如 BE 与 CA 垂直，那么容易得出 ABC 是等边三角形，从而 角 CAB = 60 度。

假如 BE 与 CA 不垂直，那么假设 ABC 的内心为 I（BE 与 AD 的交点），作 IF 垂直于 AC。可以得到 F 与 E 不重合，而由对称性可知 角 IFK = 角 IDK = 45 度，从而 角 IFK = 角 IEK，因此 I, K, F, E 四点共圆，因此 CK*CI = CF*CE = CD*CE。这等价于 CK/CD = CE/CI。而 CI 是角平分线，因此 三角形 CKD 与 三角形 CEI 相似，所以 角 CIE = 角 CDK = 45 度。从而可以得出 三角形 ABC 的两个底角等于 45 度，而 角 CAB 等于 90 度。

5. 证明：存在非退化的三角形三边长为 a, $f(b)$, 和 $f(b+f(a)-1)$ 等价于

$a+f(b) >= f(b+f(a)-1)+1 ... (1)$

$a+f(b+f(a)-1) >= f(b)+1 ... (2)$

$f(b)+f(b+f(a)-1) >= a+1 ... (3)$

在 (1) (2) 中让 $a = 1$ 可以得到 $1+f(b) >= f(b+f(1)-1)+1$ 和 $f(b+f(1)-1)+1 >= 1+f(b)$，也就是说

$f(b) = f(b+f(1)-1) ... (4)$

假如 $f(1) > 1$，那么从这个条件我们可以得出 $f(n)$ 是有界的，上界为 $f(1), f(2), ... f(f(1)-1)$ 中的最大值，在 (3) 中让 a 足够大可以得出矛盾。因此 $f(1)=1$。

接下来让 $b = 1$，和前面类似，从 (1) (3) 可以得到 $f(f(a)) = a$。进一步，从这个条件我们可以得出 $f(n)$ 是双射以及对于任意 $n > 1$ 都有 $f(n) != 1$。

由 (1) 可以推出 $k(a-1)+f(b) >= (k-1)(a-1)+f(b+f(a)-1) >= ... >= f(b+k(f(a)-1))$，因此，我们可以推出 对于任意的 $n <= (k+1)(f(a)-1)$，都有 $f(n) <= max\{f(1), f(2), ... , f(f(a)-1)\} + k(a-1)$，假如 $f(a) > a$ 的话，会导致 k 足够大的时候像集比原像集小，和 f 是双射矛盾。从 $f(a) <= a$ 和 f 是双射可以推出 $f(a) = a$。

6. 证明：为了方便我们把 M 里的点称为陷阱。用归纳法，$n = 1, 2$ 的时候显然。

下面假设命题对任意 $n < k$ 成立，我们考虑 $n = k$ 的情形。先考虑所有步长从小到大排列，不妨设 $a1 < a2 < ... < an$。从原点开始往正方向数，考虑第一次所经过的陷阱个数超过步数的那一步，不妨设为第 i 步。

假如 $i = n$，那么考虑两种情况，假如 s-an 不在 M 里，那么对于前 n-1 步用归纳假设即可。否则，除了 s-an 以外，还有 n-2 陷阱，我们考虑把 a1, a2, ... , an-1 中的某一个放在最后一步，而把 an 放在倒数第二步。由于 s-an-aj 不可能是大于等于 s-an 的数，而 s-aj 不可能是小于等于 s-an 的数，我们可以得出存在一个 aj，使得 s-aj 和 s-an-aj 都不是陷阱。而从我们对于 i 的选取方法我们知道 [s-an, s] 这个区间里至少有两个陷阱，于是这时候再对前 n-2 步在 [0, s-an-aj] 区间里用归纳假设即可。

$i = 1$ 的情况也是类似的。

下面假设 $i < n$，我们考虑前 i-1 个陷阱，和前面的讨论类似，存在前 i 步的一种排列，使得避开了前 i-1 个陷阱，而且最后两步至少覆盖了这 i-1 个陷阱中的两个。因此我们可以知道除了第 i-1 步和第 i 步之外，其他的 i-2 步都不会踩到后面 n-i 个陷阱。

假如第 i-1 步没有踩到陷阱，那么我们可以对最后的 n-i+1 步（也就是包括第 i 步）利用归纳假设，由于调整后第 i 步的步长不可能变小，所以调整后同样不会踩到前面的 i-1 个陷阱。

假如第 i-1 步踩到了陷阱，那么说明前 i-1 个陷阱都在第 i-1 步之前。因此，我们不妨假设第 i-1 步比第 i 步长，否则我们可以交换第 i 步和第 i-1 步，这样不影响前面 i-1 个陷阱，而第 i-1 步最坏情况下也只是和原来一样踩到后 n-i 个陷阱中的某个。这样一来第 i 步是后 n-i+2 步中最短的，而第 i-2 步次短，由于第 i-1 步踩到了陷阱，我们可以和前面类似的讨论，把后 n-i-1 个步长中的某个和第 i-1 步交换，使得第 i-1 步不会踩到陷阱，由于原来的 i-1 步步长次短，这样调整不会影响前 i-1 个陷阱。这时我们再对后面的 n-i 步用归纳假设就行了。

第十一章 数学之美——数学的广延性

11.1 美妙的自然对数 e

e，一个奇妙的字符，在英语中是出现频率最高的字母。巧合的是，在自然界的种种现象中，凡是涉及连续变化的过程，几乎都离不开 e 的身影。

e 的定义，$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$，看似简单的表达式，蕴含着深刻的内涵。我们先来看一个“简单”的连续变化问题。

一个人有 N 升血，现要用 M 升新鲜血均匀输入体内，同时以同样的速度从体内抽血，即保持体内血液总量不变。假设血液瞬间混合均匀。问最后人体内新鲜血的比例？

读者可能会想，如果先输旧血，再抽血，问题会非常简单：输血后新鲜血比例变为 $\frac{m}{m+n}$，抽血多少不影响新鲜血比例。如果先抽血，那也很简单，比例为 $\frac{m}{n}$. 但如果同时进行，似乎无法考虑。我们不妨简化这个问题，把抽血和输血过程分为一个个部分，对每个部分，都先抽血，后输血，这样输血后总血量不变，便于计算比例；当部分趋于无穷小，即这样的部分数目趋向无穷大时，从极限的意义上考虑，就是“连续”的抽血、输血过程了。这种分成很多部分取极限的方法称为“小量分析”，在物理竞赛中有广泛的应用。

我们先考虑分成两个部分的情况。如果考虑新鲜血的多少，就会十分复杂，因为还有新血输入。但我们转换角度，考虑还剩多少旧血。旧血量的改变只发生在抽血时，故每次考虑从 n 升旧血比例为 p 的血液中抽出 $\frac{m}{2}$ 升血，剩下的旧血量。则初始比例为 1，第一次剩余 $p=\frac{n-m/2}{n}$，第二次剩余 $p\frac{n-m/2}{n}$,最后新血量为 $1-(\frac{n-m/2}{n})^2$.

下面考虑分成 T 个部分的情况。设 $p_0=1,\ p_i=p_{i-1}\frac{n-m/T}{n}$.则迭代后有 $p_T=(\frac{n-m/T}{n})^T$.上式化为 $p_T=(1+\frac{-m/n}{T})^T$. $\lim_{T\to\infty}p_T=e^{-m/n}$ 这里用到一个结论 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n=e^a$. 故最后新鲜血所占的比例为 $1-e^{-\frac{m}{n}}$.

我们欣喜的看到，在这个问题中，自然对数的底数 e 起到至关重要的作用。特别的，当 m=n 时，新鲜血占比例为 1-1/e, 大约是 0.632，也就是经过这样一次“换血”操作，有多于五分之三的血液被更新。这与读者的设想是否相符，可以考虑一下。

我们再来提出这样一个问题。取两枚相同的硬币，让一枚硬币在另一枚固定硬币外面作无滑动滚动。在运动的硬币边缘上做一个标记，则在运动一周回到起始点后，标记也会随着硬币边缘画出一条封闭的曲线。那么，这条曲线的周长是多少？

有兴趣的读者不妨试一试，最终获得的图形是一条“心形线”，十分美丽。它的周长就是硬币直径的 8 倍。很巧妙，这个值与在曲线中常出现的圆周率 π 无关。至于这个问题的求解，也要用到 ln 函数，就是自然对数，由于涉及较深的高等数学知识，此处不再展开。

在小学数学中，可能就有这样的问题：将一个数分成若干个数之和，使得这些数的乘积最大。我们都知道，尽量分解成 3，最后剩下的分解成 2+2. 那么，读者是否想过，为什么分解成 3 的乘积最大？从函数的角度考虑，就是求函数 $f(x)=(\frac{a}{x})^x$ 的极值。两边取对数得 $\ln f(x)=x\ln\frac{a}{x}$. 两边求导数得 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\frac{a}{x}+1$. 即 $f'(x)=(\frac{a}{x})^x(\ln\frac{a}{x}+1)$.令 f’(x)=0 有 $\ln\frac{a}{x}=-1$, 解得 $x=\frac{a}{e}$.这就是说，当 a 分解成 e 的和时，所得乘积最大。于是，3 是最接近 e 的数，故整数应尽量分解为若干个 3 的和。

很多人也许接触过这样的问题，在一条长为 l 的不断以速度 v 伸长的橡皮筋上，一只蚂蚁从固定的一端开始，以恒定的速度 s 向另一端爬去。问蚂蚁爬到另一端所需的时间。

我们仍然通过小量分析来解决这个问题。如果把橡皮筋然全长定为 1，那么不管橡皮筋拉多长，都是 1。这里用了一种重要的数学思想，就是设全体为“1”，根据总体求部分。拉长的结果是让蚂蚁的速度下降为原来的 $\frac{1}{1+vt}$. 蚂蚁在 t 时刻的速度是 $\frac{s}{1+vt}$. 则蚂蚁在微小的时间段 dt 内走过的路是 $\frac{s}{1+vt}dt$.则蚂蚁从 0 时刻走到 t 时刻的路程为 $\int_0^t\frac{s}{1+vt}dt$.由于 $\int_0^t\frac{s}{1+vt}dt=\frac{s}{v}\ln(1+vt)$，由于全长为 1，解方程 $\frac{s}{v}\ln(1+vt)=1$，得 $t=\frac{1}{v}(e^{\frac{v}{s}}-1)$.
显然，上式结果 t 为正值。于是，不论蚂蚁的速度多慢，蚂蚁总能爬到橡皮筋的另一端，只是可能需要很长的时间。

此问题相当于调和级数求和。我们今天发现的调和级数悖论则是芝诺悖论（阿基里斯追不上乌龟）的又一个很巧妙的翻版。欧拉在 1734 年，利用牛顿的成果，首先获得了调和级数有限多项和的值。结果是：1+1/2+1/3+1/4+...+1/n= ln(n+1)+r(r 为常量)。r 的值，约为 0.577218。这个数字就是后来称作的欧拉常数。

类似的，我们可以提出另一个问题，如果蚂蚁开始位于橡皮绳中间，向固定端爬去，会有什么现象发生？这个问题是显然的，如果蚂蚁的速度比橡皮绳伸长的速度还慢，则会不断远离固定端，永远不能到达；若速度比伸长速度快，则会逐渐接近固定端；若速度与伸长速度恰好相等，则会永远在同一个初始位置。有兴趣的读者可以考虑到达固定端的时间。

为什么自然对数 e 有如此大的“威力”？事实上，这源于一个积分公式 $\int_0^x\frac{dx}{x}=\ln x$.在

反映自然界种种现象的函数中，往往要确定微分方程，就是这个状态与上个状态相联系的“递推式”，应用到连续变化上，只要存在形如$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$的项，就会产生 ln 这个以 e 为底的对数。而在物理学中，速度与位移的关系、力与速度的关系都是导数关系，所以这样的对数不会少见。“自然对数”这个名称，就是因它反映“自然”的规律而得名。

11.2 奇特的黄金分割

1，1，2，3，5，8，13，21……这样一个数列，蕴藏着怎样的玄机？

不妨对相邻的两个数做除法，发现他们的比值越来越接近$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618...$事实上，求出递推数列$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$的通项公式，就知道“黄金分割”的来历。

有趣的是，构造数列$a_n=[\frac{\sqrt{5}-1}{2}n]$, $b_n=[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n]$这两个数列恰好补充不漏的覆盖整个正整数集；性质：对任意$n\in N^+, a_{n+1}=a_n+\begin{cases}1 & n\notin\{a_i\}, i=1,2,...n\\ 2 & n\in\{a_i\}, i=1,2,...n\end{cases}$. 这是两道 IMO 试题的命题思想来源。

这是由于，一个著名的“贝蒂定理”：设 a、b 是正无理数且 1/a +1/b =1。记 P={ [na] | n 为任意的正整数}，Q={ [nb] | n 为任意的正整数}，则 P 与 Q 是 Z+的一个划分，即 P∩Q 为空集且 P∪Q 为正整数集合

证明：因为 a、b 为正且 1/a +1/b=1，则 a、b>1，所以对于不同的整数 n，[na]各不相同，类似对 b 有相同的结果。因此任一个整数至多在集合 P 或 Q 中出现一次.

下证 P∩Q 为空集；(反证法)假设 k 为 P∩Q 的一个整数，则存在正整数 m、n 使得[ma]=[nb]=k.即 k < ma，nb<k+1，等价地改写不等式为 m/(k+1)< 1/a < m/k 及 n/(k+1)< 1/b < n/k. 相加起来得 (m+n)/(k+1) < 1 < (m+n)/k，即 k < m+n < k+1.这与 m、n 为整数有矛盾，所以 P∩Q 为空集.

下证 Z+=P∪Q；已知 P∪Q 是 Z+的子集，剩下来只要证明 Z+是 P∪Q 的子集. (反证法)假设 Z+\(P∪Q)有一个元素 k，则存在正整数 m、n 使得[ma]< k <[(m+1)a]、[nb]< k <[(n+1)b]. 由此得 ma < k <=[(m+1)a]-1<(m+1)a -1，类似地有 nb < k <=[(n+1)b]-1<(n+1)b -1. 等价地改写为 m/k < 1/a < (m+1)/(k+1)及 n/k < 1/b < (n+1)/(k+1)。两式加起来，得(m+n)/k < 1 < (m+n+2)/(k+1)，即 m+n < k < k+1 < m+n+2.这与 m, n, k 皆为正整数矛盾.

所以 Z+=P∪Q.

我们看到，令$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, b=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$,恰好满足“贝蒂定理”的条件，于是构造出两个“互补”的数列. 至于第二个性质，是由于在将 1,2,...依次排入两个数列时，不属于 a 数列的自动进入 b 数列，占据了一个数，而 b 数列中没有两数连续，故此时 a 数列相邻两项差

为 2. 其余时 a 数列各项为连续正整数. 事实上，对每个 a_i, $a_{a_i+1}-a_{a_i}=2$,此时 $b_i=a_{a_i}+1$.

更巧妙的是， $b_n=a_n+n$. 但若取 a,b 为其他无理数，则难以找到如此巧妙的性质。

有一种取石子游戏：两堆石子分别有 m、n 个，两人轮流取石子，或从一堆中取若干个，或从两堆中取同样多个。最后取完所有石子者获胜。问先取者是否有必胜策略？

我们惊奇的看到，当 m、n 分别是上述数列的 a_i, b_i 时，后取者有必胜策略；否则先取者有必胜策略。原理十分简单。我们称一个状态 (a_i, b_i) 为胜状态，其他(a,b)为败状态。对任意状态(a,b)，若为胜状态，则经过一次操作，由于两个数列无重复项，从一堆中取显然不能到另一个胜状态；从两堆中取，没有两个胜状态的石子数之差相等，也不可能到胜状态。而从败状态出发，总有一种取法使得成为胜状态，由于两个数列递增，若状态中的一个数存在于对应数列 a、b 中，则取走另一堆中多余的棋子；若状态中的两个数都不在对应数列中，则取走相同数目，让较少的一堆棋子数成为 a 数列中的元素，则此时另一堆棋子数必在 b 数列中。由此，必胜策略的原理得证。

来源于黄金分割的斐波那契数列，与正整数的分拆有关。每个正整数都可以唯一表示为若干个不相邻的斐波那契数之和。首先证明存在性。采用数学归纳法。正整数较小时显然。假设对不大于 F_n 的正整数成立，则对 (F_n, F_{n+1}) 的正整数 m， $F_n<F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, m-F_n<F_{n-1}$ 符合归纳假设，能表示为 F_n 与若干个不大于 F_{n-2} 的正整数之和，满足题意。下面证明唯一性。假设对某个 $F_n<m<F_{n+1}$, 其分解式中没有 F_n ，则最大为 F_{n-1} ，后面所有不相邻的斐波那契数之和不大于 $F_1+F_3+...+F_{n-1}=F_n-1$ （左右两边都加上 1 即可归纳证明），矛盾。这个性质使得采用“斐波那契基”表示正整数，类似进制的用法，成为可能。而其他二阶递推数列并没有如此巧妙的性质。

在众多国家的国旗中，五角星被广泛应用。这是由于五角星的线段长度之比符合黄金分割，显得十分美观。黄金分割的美学价值已被世人所公认，此处不再赘述。

黄金分割比 0.618...在统筹规划中有重要应用。（引用自唐起汉《黄金分割法最优性的初等证明》，中学数学月刊 2003 年第 2 期）首先将统筹规划问题归结成以下数学形式:

设 y = f (x) 是区间[a, b]上的一个函数, 如有一点 m 属于[a, b]使 f (x 1) < f (x 2) < f (m) , 当 a< x 1< x 2<m 时;f (m) > f (x 1) > f (x 2) , 当 m < x 1< x 2<b 时,则 f (x) 叫做区间[a, b]上的一个单峰函数, 点 m 叫做好点.设 y = f (x) 是区间[a, b]上的一个单峰函数, 问题在于, 在实际问题中 f (x) 的表达式并不清楚. 我们旨在找到一个适用于各种单峰函数的最佳安排试验的方法.

根据单峰函数的特点, 显然可用来回调试法缩短试验范围, 减少试验次数, 去找 f (x) 的好点 m : 先取一点 x 1 做试验得 y 1 = f (x 1) , 再取一点 x 2 做试验得 y 2 =f (x 2) , 如果 y 1< y 2, 就去掉[a, x 1]; 在留下的区间[x 1, b] 内取一点 x 3, 做试验得 y 3 =f (x 3) , 如果 y 2> y 3, 就去掉[x 3, b]; 再在留下的区间[x 1, x 3]内取一点 x 4 做试验; …不断做下去, 就逐渐接近所要找的好点 m.问题在于, 怎样取试验点 x 1, x 2, …才能做到通过尽可能少的试验找出好点? 实际应用中, 常采用对称来回调试法(俗称“折纸法”) , 即选取新的试验点使其与留下的试验点在区间内对称. 这样一来, 就归结为怎样取第一个试验点 x 1 效果最好?

可以把 x_i (i= 1, 2, …, n) 表示为连分数形式

$$x_1=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{r_n}{a_n+r_{n-1}}}}}}.$$

如取 x_1 作为第一个试验点，做 k+ak 次试验后，留下范围的长度为 $x_1,x_2,\dots x_k$,此处

$$x_i=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots+\cfrac{1}{a_i+\theta}}}$$

经归纳推导得，$a_m=\dfrac{F_{m-1}+bF_{m-2}}{F_m+bF_{m-1}}$.其中 F 表示斐波那契数。

则 $a_1a_2\dots a_n=\dfrac{1}{F_m+bF_{m-1}}$. 即从 x_1 出发做 $k+a_k$ 次试验留下的长度为

$$\frac{1}{F_k(a_{k-1}+\theta)+F_{k-1}}.$$

故取 $\omega=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots+\cfrac{1}{1+\theta}}}$ 作为第一个试验点效果最好。上述连分数的第 m 个渐进分数，恰好是 $\dfrac{F_{m-1}}{F_m}$，其极限为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

于是，华罗庚先生的“0.618 法”的最优性得证。这个方法比传统的“二分法”效率更高。

.

同样的，在信息学中的“顺序表查找问题”中，“0.618 法”也有其重要应用。在传统的二分查找方法中，每次比较区间中点与待查找值，若相等则结束，否则再根据大小确定下一步搜索针对的区间。这样一来，每次将问题的复杂度缩小一半，整体复杂度为 $O(\log_2 n)$.

如果把“区间中点”改为区间左右端点的黄金分割位置，效率会有所提高，但并不明显。下面介绍一种类似“三分搜索”的方法。

对待搜索区间[a,b], 分割为三个更小的查找区，分割点为 a+0.618*(b-a), b-0.618*(b-a). 若分割点或端点的值与待查找值相同，则成功；否则找到三个区间中合适的区间继续搜索。实践证明，这种“0.618 法”的“三分搜索”效率优于二分搜索。这再次表明，黄金分割在搜索理论、优选理论中的重要作用。

黄金分割，因其恰好是系数绝对值均为 1 的二次方程 $x^2+x-1=0$ 的根，展现出十分美妙的性质。诸如杨辉三角、组合数等方面，与斐波那契数列、黄金分割有密切关系，有兴趣的读者可进一步探究。

11.3 物理中的数学

数学是物理学的基础，除了前面介绍过的自然对数，还有很多有趣的物理学问题需要用数学方法解决。下面我们看一个生活中的例子。

在日常生活中，腿长的人行走时往往比腿短的人快，但跑步时却没有明显的不同。

我们采用物理模型讨论这个问题。对于自然行走，腿可认为是自由摆动的单摆。摆动物

体以其顶端为悬挂点，自由运动周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{mgs}}$. 其中，I 为摆的转动惯量，m 为质量，s 为转轴到质心的距离。引入“有效长度” $L=\frac{I}{ms}$,则 $T=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{g}}$.假定有效长度正比于人腿的实际长度。把需要最少肌肉能量的步态作为近似的第一步，而每走一步的时间是周期 T 的一半，故行走的速度与 $\frac{L}{T/2}$,$\sqrt{L}$ 成正比。故 $v\propto\sqrt{L}$.上面的推理假设了“最小能量损耗”，但确实被人们的日常经验所证实。

当分析跑步的情况时，腿的运动不再是自由摆动，而是肌肉对支点的力作用下的受迫振动。我们假设，腿部肌肉所提供的力 F，与腿长 L 的平方成正比。这是由于腿的相对比例相同，而 F 取决于腿肌肉的横截面积。故力矩 $a\propto FL\propto L^3$.由于物体的质量与其线度的立方成正比，故 $I\propto mL^2\propto L^5$.由物理学定理，受迫振动周期 $T\propto\sqrt{\frac{I}{a}}$.代入得 $T\propto\sqrt{\mathrm{L}}$.而跑步速度 $v\propto fL\propto\frac{\mathrm{L}}{T}\propto 1$.故跑步时的速度与腿的长短没有太大的关系。因此，在赛跑中，有的身材矮小的选手能取得不错的成绩，也就不足为奇了。

物理学的分析，一般是粗略的、模型化的。在上例的分析中，很多次要因素被忽略，这也是物理学研究的一大特点。在数学中，有时用到物理学的思想“小量分析”，也可称上是物理在数学中的应用。再如，证明不等式中的“微扰法”，在平衡位置附近偏移一个小量，观察函数值的变化趋势，就是从物理中转移过来的。

11.4 化学中的数学

高等数学知识，在化学中有广泛的应用。主要是关于分子、原子的种种理论中要用到统计学、概率论相关知识，在化学中的连续变化与微积分密切相关。

例如，统计力学中有高等数学的基础。量子化学的方程全是靠算积分和矩阵解的。分子力学里面全是基于牛顿力学的高等数学方程。还有物理化学中也有广泛应用，比如化学热力学、化学动力学、表面化学中很多公式的推导。

我们考虑最简单的分子无规则扩散运动。假设空间中有 100 个分子（当然，实际的分子数要远多于这个数目），开始位于封闭空间的一侧。假设这些分子是随机运动的，则经过很长一段时间后，由于每个分子的位置都是随机选择的，各分子又互不相同，100 个分子共有 2^{100} 种不同方法。都在左边，有 1 种可能；1 个在左边，99 个在右边，有 100 种可能；m 个在左边，100-m 个在右边，有 C_{100}^{m} 种可能；两边平均分配，可能性最大，有 C_{100}^{50} 种。用可能数除以总数 2^{100}，就得到分子分布的概率。在坐标系中连接这些点，就能形成一条“钟”

型曲线，称为“正态分布”曲线。严格的说，对于有限量，只能称为“二项分布”。

在曲线上可以清楚的看到，中间最平均的部分概率较大，随着不平均度的增加，概率迅速减小，当极不平均时，概率趋近于零，可以忽略。在上例中，45-55 都是有较大可能的；而 25 以下或 75 以上，概率几乎为零。其中还有著名的“3σ 原则”。也就是说，多个分子总是趋向平均分布的。在实际气体中，分子数目都在 10^{20} 以上，则平均分布的趋向性更大。因此，气体看起来总是混合均匀的，其中包含着深刻的统计学原理。

一般来说，如果一个量是由许多微小的独立随机因素影响的结果，那么就可以认为这个量具有正态分布。这样，生产与科学实验中很多随机变量的概率分布都可以近似地用正态分布来描述。事实上，正态分布是二项分布的可能选择数趋向无穷时的极限；二项分布代表了随机变量在一定取值范围内的概率分布，是由组合公式决定的；而在自然界的事件中，影响因素往往多而复杂，且常为连续性选择、变化，可以认为服从正态分布。

在化学热力学研究中，数学的统计理论是必不可少的。

11.5 生物中的数学

“生物数学”是一门新兴的学科。生物数学是生物学与数学之间的边缘学科。它以数学方法研究和解决生物学问题，并对与生物学有关的数学方法进行理论研究。

由于生命现象复杂，从生物学中提出的数学问题往往十分复杂，需要进行大量计算工作。因此，计算机是研究和解决生物学问题的重要工具。生命现象数量化的方法，就是以数量关系描述生命现象。数量化的实质就是要建立一个集合函数，以函数值来描述有关集合。模糊集合适合于描述生物学中许多模糊现象，为生命现象的数量化提供了新的数学工具。

这里，又要涉及到“模糊数学”的相关知识。很多人或许认为，数学是要求“严密”的，“模糊数学”就是“想当然”“不清不楚”，这种想法是错误的。在模糊集合中，给定范围内元素对它的隶属关系不一定只有“是”或“否”两种情况，而是用介于 0 和 1 之间的实数来表示隶属程度，还存在中间过渡状态。比如“老人”是个模糊概念，70 岁的肯定属于老人，它的从属程度是 1，40 岁的人肯定不算老人，它的从属程度为 0，按照查德给出的公式，55 岁属于“老”的程度为 0.5，即“半老”，60 岁属于“老”的程度 0.8。查德认为，指明各个元素的隶属集合，就等于指定了一个集合。当隶属于 0 和 1 之间值时，就是模糊集合。由于现代科技所面对的系统日益复杂，模糊性总是伴随着复杂性出现。从认识方面说，模糊性是指概念外延的不确定性，从而造成判断的不确定性。

比如描述生物种群增长的 Logistic 方程，就能够比较正确的表示种群增长的规律。从数学角度分析，这是一个微分方程 $\frac{dN}{dt}=rN(1-\frac{N}{K})$,其中 K 为环境容纳量，N 为物种实际数目，r 为该种群的内禀增长率，是由物种本身性质和所处环境状态决定的常数。从中学角度考虑，可简化为递推公式 $p_{n+1}=kp_n(1-p_n)$,其中参数 $k\in(0,4)$.这是一个著名的“没有通项公式”的递推关系。不妨设 $p_1=0.5$. 当 $k\in(0,2)$时，数列 p 递减，趋近于 0，图像类似反比例函数，开始减少速度很快，然后逐渐减慢；当 k=2 时，显然数列每项均为 0.5；当 $k\in(2,3)$时，数列 p 将在分别位于（0，0.5），（0.5，1）的两个值之间摆动，最终趋向于

中间值 0.5；当 $k\in(3,4)$ 时，数列 p 的变化规律较为复杂，随着 k 的增大，数列的变化越来越随机；尤其是 $k\geq 3.8$ 时，几乎无规律可循，可认为是随机数列，产生“混沌”现象。目前，数学家正在对这个递推数列的性质进行深入研究。

r 和 K 这两个参数对于自然选择和进化类型的研究,具有十分重要的意义, 可把生物分为 r -对策者和 K - 对策者两大类. 属于 r - 对策者的生物,例如易于造成大规模危害的害虫,害鼠等,在自然选择中的进化方向是有利于提高 r 值. 它们的 r 值通常很大,生殖力很高,个体小,寿命短,死亡率高,因此该种群密度波动剧烈,常易形成大规模的死亡。属于 K - 对策者,如虎,狮等大型兽类,昆虫中长寿命的热带蝶类等,在自然选择中的进化方向是 r 值减小,种群数量保持在 K 值邻近,繁殖力较低,个体较大,寿命较长,种群数量稳定,而在这两种类型之间, 具有各种不同程度的中间类型。（上段引用自龚军辉《Logistic 方程的推导及其生物学意义》，中学教学 2008 年 2 月）由此可见，数学分析在生物学中有广泛应用。

通过描述捕食与被捕食两个种群相克关系的洛特卡-沃尔泰拉方程，从理论上说明：农药的滥用，在毒杀害虫的同时也杀死了害虫的天敌，从而常常导致害虫更猖獗地发生。这是两个一阶非线性微分方程 $\frac{dx}{dt}=x(a-by)$, $\frac{dy}{dt}=-y(p-qx)$. 其中 y 是掠食者（如狼）的数量；x 是猎物（如兔子）的数量；dy/dt 与 dx/dt 表示上述两族群相互对抗的时间之变化；t 表示时间；a,b,p,q 表示与两物种互动有关的系数，皆为正实数。此方程式拥有周期性的解，且无法简单地以常用的三角函数表达。不过经过线性近似的过程之后，掠食者与猎物的族群大小变化可以表达成两个简谐运动的图形，差距为 90 度。

在此模式系统中，当猎物数量充足的时候，掠食者的族群也会兴旺起来。不过掠食者的族群最后仍然会因为超过猎物所能供给的数量而开始衰减。当掠食者的族群族群缩减，则猎物族群将会再次增大。两者的族群大小便以周期性的成长与衰减进行循环。我们注意到，当 $y=\frac{a}{b}, x=\frac{p}{q}$ 时，两个种群能够一直维持下去现在的数目，达到一种平衡，这就是方程的“不动点”。

还有一类更一般的方程类型，称为反应扩散方程的数学模型在生物学中广为应用，它与生理学、生态学、群体遗传学、医学中的流行病学和药理学等研究有较密切的关系。60 年代，普里戈任提出著名的耗散结构理论，以新的观点解释生命现象和生物进化原理，其数学基础亦与反应扩散方程有关。

耗散结构理论可概括为：一个远离平衡态的非线性的开放系统通过不断地与外界交换物质和能量，在系统内部某个参量的变化达到一定的阈值时，通过涨落，系统可能发生突变即非平衡相变，由原来的混沌无序状态转变为一种在时间上、空间上或功能上的有序状态。这种在远离平衡的非线性区形成的新的稳定的宏观有序结构，由于需要不断与外界交换物质或能量才能维持，因此称之为“耗散结构”。例如人体，以至一切生物，都是“耗散结构”。

耗散结构理论，需要引入重要的“熵”的概念，简单的说，就是“混乱度”的意思。讨论需要使用热力学第一定律、热力学第二定律，以及微积分的有关知识，本文不再展开。

11.6 信息学中的数学

在信息学竞赛中，许多问题更是与数学息息相关。在组合数学书籍中，一般都有这样的语句“随着计算机科学的发展，组合数学也逐渐得到发展进步”。可见数学与信息学是紧密相关的。事实上，学习信息学竞赛，需要的数学基础，尤其是高等数学，并不比数学竞赛少。

事实上，信息学竞赛对抽象思维的要求，甚至比数学还高。因为数学竞赛往往面对的是具体问题、具体数字，只需要对这一种情况进行考虑，遇到特殊情况临时解决即可。而信息学竞赛是编程题目，计算机面对的是可能性众多的数据，而程序是选手事先写好的，不可能让计算机“随机应变”，故选手必须提前考虑好所有可能，找到解决此类问题的通用解法。所以，信息学竞赛无论是题目描述，还是解答、程序，都远比数学题长。

在大千世界中，我们所面对的事物形形色色，扑朔迷离。它们都是由许多信息构成的。这些现实世界中对客观问题表面的自然语言描述，称为信息原型。当然，在信息学竞赛中我们所面临的问题也是信息原型。信息原型本身是由扑朔迷离的信息构成，掩盖了其重要的属性。我们因而无法直接从信息原型入手找到问题的答案。为此，我们就需要一种方法来“改造”信息原型，使之既具有原来的重要属性，也具有可研究性。

于是，我们试图将信息原型的属性一起转移到一个模型中。模型即是对客观问题属性的模拟。显然，这个对应出的模型可以说是信息原型的代表。我们就可以对这个模型进行研究。

用什么方法将信息原型对应到模型上去呢？我们期望运用数学方法。这样对应出的模型即具有原问题的属性又具有数学的可研究性。我们称之为数学模型。数学模型：运用数学语言对信息原型通过抽象加以翻译归纳的产物叫做数学模型。

信息原型是现实的问题，对应到的数学模型又是理论上的模型，对该模型进行研究使我们得出了现实问题的解。这就是信息学竞赛中解题的简单过程：现实——理论——现实。

数学模型是人们解决现实问题的有力武器。人们把现实问题经过科学地抽象、提炼得到数学模型，再用数学方法去解决。数学模型可分为离散和连续两种。连续数学模型需要大量的高等数学知识，中学生很少接触。在信息学竞赛经常出现的则是离散数学模型。

对于同一个现实问题，可能可以建立不同的数学模型。这种现象十分普遍，也就是平时所说的一题多解。既然如此，这里有必要讨论一下数学模型的选择问题，其实也就是评判一个模型好坏标准的问题。一个好的数学模型不仅要能够准确地反映出现实模型（可靠性），所建立的模型还必须能够被有效地解决（可解性）。这里“有效”指的是解决它的算法所需的空间与时间都在可以承受的范围之内。通常在解一些要求最优解或要求准确计数的一类具有唯一正确解的试题时，我们一般在保证可靠性的前提下，尽量提高模型的可解性。若几个模型都具有可靠性，则当然可解性越强的模型越好。

一个模型可能同时适用于多个现实问题。这也就是我们要研究数学模型的主要原因之一。我们解决一个数学模型就相当于解决了一类问题。比如说，最短路径问题，可谓在现实生活中无处不在，例如在城市交通网中，求两点间的最短路径；网络流的模型也有着很高的实用价值，例如城市的供水网络能够有多大的流量。这些数学模型的解决使得许多实际问题迎刃而解。然而，数学模型的解决只是解决一个现实问题的一半，另一半就是如何将现实问题转化为一个已经解决的数学模型，即如何建模。建模在现实与抽象之间起着桥梁的作用。尤其在竞赛中，后者有时显得更为重要。

要能够建立数学模型，首先必须熟悉一些经典的数学模型及其算法。这是建模的基础，没有这个基础则根本谈不上建立什么数学模型。竞赛中许多问题最终都可以转化为经典的数学模型，因此必须掌握这些常见的模型。其次建立数学模型需要选手有把实际问题相互联系，类比的能力。数学模型之间必然存在着一些相同或相似。相互联系、类比是发掘这些信息的

有效手段。

下面我们举几个例子，说明数学模型的建立与应用。

例 1 对 n*n 的方阵，每个小格可涂 m 种颜色，求在旋转操作下本质不同的图像个数。

分析 我们可以在方阵中分出互不重叠的长为 $[\frac{n+1}{2}]$，宽为 $[\frac{n}{2}]$ 的四个矩阵。当 n 为偶数时，恰好分完；当 n 为奇数时，剩下中心的一个格子，它在所有的旋转下都不动，所以它涂任何颜色都对其它格子没有影响。令 m 种颜色为 0~m-1，我们把矩阵中的每格的颜色所代表的数字顺次(左上角从左到右，从上到下；右上角从上到下，从右到左；……) 排成 m 进制数，然后就可以表示为一个十进制数，其取值范围为 $[0, m^{[\frac{n^2}{4}]}-1]$. (因为 $[\frac{n}{2}]*[\frac{n+1}{2}]=[\frac{n^2}{4}]$) 这样，我们就把一个方阵简化为 4 个整数。我们只要找到每一个等价类中左上角的数最大的那个方案(如果左上角相同，就顺时针方向顺次比较) .

进一步考虑，当左上角数为 i 时,令 $R=m^{[\frac{n^2}{4}]}$ 0≤i≤R-1，可分为下列的 4 类：其它三个整数均小于 i，共 i^3 个。右上角为 i，其它两个整数均小于 i，共 i^2 个。右上角、右下角为 i，左下角不大于 i，共 i+1 个。右下角为 i，其它两个整数均小于 i，且右上角的数不小于左下角的，共 i(i+1)/2 个。此处的讨论中，要注意“最大性原则”，并考虑边界情况。

因此，

$$
\begin{aligned}
L&=\sum_{i=0}^{R-1}(i^3+i^2+i+1+\frac{1}{2}i(i+1))=\sum_{i=0}^{R-1}(i^3+\frac{3}{2}i^2+\frac{3}{2}i+1)\\
&=\sum_{i=1}^{R}((i-1)^3+\frac{3}{2}(i-1)^2+\frac{3}{2}(i-1)+1)=\sum_{i=1}^{R}(i^3-\frac{3}{2}i^2+\frac{3}{2}i)\\
&=\frac{1}{4}R^2(R+1)^2-\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}R(R+1)(2R+1)+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}R(R+1)\\
&=\frac{1}{4}(R^4+R^2+2R)
\end{aligned}
$$

当 n 为奇数时，还要乘一个 m .

由此我们就巧妙地得到了一个公式。但是，我们应该看到要想到这个公式需要很高的智能和付出不少的时间。另一方面，这种方法只能对这道题有用而不能广泛地应用于一类试题，具有很大的不定性因素。因此，如果能掌握一种适用面广的原理，就会对解这一类题有很大的帮助。

下面我们就采用 Pólya 定理。我们可以分三步来解决这个问题。

1．确定置换群。在这里很明显只有 4 个置换：转 0°、转 90°、转 180°、转 270°。所以，置换群 G={转 0°、转 90°、转 180°、转 270°}。

2．计算循环节个数。首先，给每个格子顺次编号（$1\sim n^2$），再开一个二维数组记录置换后的状态。最后通过搜索计算每个置换下的循环节个数，效率为一次方级。

3．利用 Pólya 定理得到最后结果。 $L=\frac{1}{|G|}(m^{c(g_1)}+m^{c(g_2)}+...+m^{c(g_n)})$.

由此可见，作为组合数学理论一部分的 Pólya 定理在信息学竞赛中得到应用。我们还可以看到，数学竞赛题与信息学竞赛题解题思维的不同。数学竞赛要求得出最终结果，所有计算过程都由人完成；而信息学竞赛只要求提供一种具体的、解决通用性问题的方法，具体计算工作则由计算机完成。这样，利用计算机的高速计算能力，可以简化问题的考虑步骤，完成很多人类无法完成的工作。

例 2 方格取数问题。在 n*n 的方格纸中，每个格子中都有一个正整数。从中取出若干数，使得任意两个取出的数所在方格没有公共边，且取出的数的总和最大。

分析 本题可以抽象成一个图论问题。将每个格子看成一个顶点，填入的正整数为其权值；两个相邻格子之间连一条边。目标是求出一个顶点集合，使得其中任意两顶点没有边相连，且顶点的权值之和最大。这是图论中的著名问题，请读者思考。

例 3 有 n 根柱子，现在有任意正整数编号的球各一个，请你把尽量多的球放入这 n 根柱子中，满足：①放入球的顺序必须是 1,2,3…，且每次只能在某根柱子的最上面放球；②同一根柱子中，相邻两个球的编号和为完全平方数。请问，在 n 根柱子上最多能放多少个球？

分析 经简单的试验，可以发现一些规律。如果借助计算机程序，可以更快。令

$f(n)=[\frac{n^2}{2}+n-\frac{1}{2}]$，我们猜想 f(n)为正确答案。根据 n 的奇偶性分类讨论，若 n 根柱子放了 f(n)+1 个球，考虑最大的 n+1 个球中最小两球数字和 min、最大两球数字和 max，则 min、max 夹在两个相邻完全平方数之间，故 n+1 个球的任意两个不能在同一柱子上，矛盾。具体地说，当 n=2k+1 时，

$$f(n)=2k^2+4k+1,\ \min=4k^2+6k+3>(2k+1)^2, \max=4k^2+8k+1<(2k+2)^2；$$

当 n=2k 时，$f(n)=2k^2+2k-1, \min=4k^2+2k-1>(2k)^2, \max=4k^2+4k-3<(2k+1)^2.$

而使用贪心方法，即尽量往左边的柱子上放，依次寻找，能放则放，则利用数学归纳法，最后可放入 f(n)个球。

例 4 三维数码难题：给出 n*n*n 的立方体，恰好有一个方块为空，其他每个方块上写着 $[1,n^3-1]$ 的不同数字。每次可以把一个与空位相邻的方块移动到空位中。给出初始状态、终止状态，问是否可以实现。

分析 我们先考虑二维数码难题。我们知道，如果只交换两个数字的位置，则肯定无法达到。对于此类变换问题，通常从奇偶性的角度考虑。

例 5 给定 n,m(n≥m)，从正 n 边形的顶点中选出 m 个，能组成多少个不同的 m 边形？若一个多边形可由另一个通过旋转、翻转、平移得到，则认为两个多边形相同。

分析 把每种旋转、翻转视作一种置换，看做若干个互不相交的循环，它的 V 值设为从置换中取出 m 个元素并使每个循环中的元素或同被取出，或都未被取出的方案数。最终答案即为所有置换的 V 值的平均数。

在顺时针旋转 a 格的置换中，循环的个数为(n,a), 每个循环的长度为 n/(n,a). 对于翻转，当 n 为奇数时，只有一种情况，即[n/2]个循环长为 2，一个长为 1，由组合数公式，$V=C_{[n/2]}^{[m/2]}$.

当 n 为偶数时，有 n/2 个置换使得 n/2 个循环长度均为 2，此时若 m 为偶数，$V=C_{n/2}^{m/2}$,否则 V=0；有 n/2 个置换使得 n/2-1 个循环长为 2，两个循环长为 1，此时若 m 为偶数，

$V=C_{n/2-1}^{m/2}+C_{n/2-1}^{m/2-1}$；否则 $V=2C_{n/2-1}^{(m-1)/2}$。故当 n 为偶数，m 为奇数时，$V=nC_{[n/2]-1}^{[m/2]}$；当 n 为奇数或 n、m 为偶数时，$V=nC_{[n/2]}^{[m/2]}$.所以旋转的所有置换的 V 值之和为 $\sum_{L|(m,n)} C_{n|L}^{m|L}\varphi(L)$.

此处 φ 表示欧拉函数，(a,b)表示 a、b 的最大公约数。

类似的，利用群论思想，还可以解决诸如化学中的同分异构体计数等需要判定并消除重复的组合计数问题。至于其中的原理，请参考有关组合数学、群论书籍。

学习信息学竞赛，还能对数学竞赛有极大的帮助。吴文虎教授说，信息学提供给我们的是一种“计算思维”，就是在有计算机时如何运用程序加速我们的思考与工作。笔者在思考和研究数学问题时，经常想到编写程序解决问题，例如对于一类数列、集合的性质，用笔算试验可能过于麻烦，就可以使用计算机程序先对小规模数据进行试探，再从中寻找规律。实践证明，这种方法比直接从数学角度推导更节省时间。这也就是本文“试探法”的思想。

例 6 若四元集 E={a,b,c,d}中的四个数 a,b,c,d 能够分成和相等的两组，则称 E 为“平衡集”。试求集 M={1,2,...100}的平衡子集的个数。

分析 本题若用官方解答的方法，十分复杂。但若从计算机的角度考虑，则较为简单。事实上，本题就是要找到 1~100 中的 4 个不同数 a<b<c<d，使得 a+d=b+c，或 a+b+c=d. 若采用计算机枚举，将首先枚举第一个数，再枚举第二个数，再枚举第三个数，最后判断据此算出的第四个数是否符合题意。对两数之和相等的情况，只需找到可能的不同两数和 1+2=3 ~ 99+100=199，再考虑每个和共有多少种由不同数的组成方式 f_i，则 $C_{f_i}^2$ 即为从其中选出两组的方案数，最后对 f_i 求和。这样，两数和问题变成了对组合数的求和。对三数之和等于第四数，实际上等价于找三个不同的正整数，和不超过 100. 这样，分别对和为 1+2+3=6 ~ 100 进行讨论，当和为 s 时，枚举最大数[s/3]+1 ~ s-3, 对（s-最大数）计算有多少种两数组成方式。这样，三数和问题变成了两次累加，先解决两数和固定，再解决三数和固定，最后解决三数和小于等于 100 问题. 最后将两种情况相加即可。

当然，对于这道题，还可以有更深入的探究。可以推导出在前 n 个正整数中找到 m 个互不相同的数，使其和为 s 的方法数。对于允许重复的情况，也有类似的讨论。这是组合数学中的一类重要计数问题。就本题而言，也可以使用减去重复的办法，先考虑总数，再减去重复情况数×重复次数。由此可见，学习信息学竞赛，能够启发数学竞赛的思路。

信息学竞赛题中的“博弈论”，作为数学的重要分支，在经济、生活中有重要应用。下面摘录笔者《从博弈游戏到社会和谐》的最基础内容，说明博弈论的应用。

我们先来看一个简单的博弈游戏。两个囚徒被关在监狱中，并彼此分开，无法接触。检察官告诉他们，如果两人都坦白事实，就都判刑 10 年；若只有一人坦白，则坦白者无罪释放，不坦白者重判 15 年；若两人都不坦白，都判刑 1 年。若两个囚犯都足够聪明，则会采取什么样的策略，才能使自己（不考虑另一个囚徒）尽可能判刑减少？

笔者曾经用这个问题考验过很多人，他们的想法不尽相同，您也应该先分析一下。这里我们给出一种简单的考虑方法。若对方坦白，则自己坦白判刑 10 年，比不坦白的 15 年好；若对方不坦白，则自己坦白判刑 0 年，比不坦白的 1 年好。无论如何，坦白都比不坦白更占优势。于是两人都会选择坦白，最终都被判刑 10 年。但从整体的角度考虑，显然，两人选择不坦白是较优的。这就是著名的“囚徒困境”问题。

初看这个问题，似乎类似心理问题，但经过简单分析之后，就会茅塞顿开。我们对这个游戏进行扩展，考虑重复的双人对弈游戏。如果囚徒困境的结果是减分 0，-1，-10，-15，博弈永不停止，我们将必须考虑自己的选择对后面的影响。并且，我们希望达到双方持久的

合作，就是都不坦白。这样，我们为了得到尽可能高的分数，该采取怎样的策略呢？

曾有科学家对这个问题进行深入的研究，他们选择了数十种不同的策略，利用计算机进行模拟博弈，采用单循环赛的方式，重复若干次，得分最多者为优胜。最终，一种名叫“Tit-for-tat”的策略以优异的表现取胜。这个策略很简单：首次选择合作；以后把对方上次的策略当作自己的策略。很容易看出，这就是所谓的“以牙还牙”，英文名字 TFT 也就是这个意思。有趣的是，若游戏双方都选择“以牙还牙”策略，则整个游戏过程都是合作状态；即使与较优的策略进行对抗，“以牙还牙”策略也会渐渐使对方减少背叛，增加合作，双方得分都有所提高。这种简单而巧妙的策略，在现实生活中也许会有极大的作用。

纳什均衡理论，作为博弈论的重要思想，在经济分析、社会分析等领域有着重要作用。学习纳什均衡，修改纳什均衡，利用纳什均衡，我们的世界必将更加美好！

很多信息学竞赛题，事实上是数学竞赛题的推广。例如本文中提到的与互补数列有关的双人取棋子游戏，就是全国信息学竞赛试题，要求判断是否能够达到。另外，求用 3^k 组成的数。有多道 IMO 试题后来被改编为信息学竞赛试题。例如第 34 届 IMO 第 3 题：在无限的方格棋盘上，有 n*n 个格放有棋子，每次移动必须跳过一个棋子进入空格，并“吃掉”被跳过的棋子，问最后是否有可能只剩一个棋子。在信息学竞赛中，该问题被推广为：对于 m*n（行列数可能不等）的棋子，最少剩下多少个棋子？当然，本题在信息学中不能算是很难的题目，由于编写程序只需得出结论而无需证明。但这足以说明信息学竞赛对数学竞赛的促进作用。有兴趣的同学可以参看信息学竞赛国家集训队论文，比较数学竞赛与信息学竞赛中数学问题，尤其是组合问题的难度高低与考察方面的不同。

以上介绍了各学科竞赛与数学的联系。也许有人会问，这些内容是否对竞赛有意义，我们可以用本文引言中的一句话作为回答：当竞赛回归自然，参加竞赛是真正出于对数学的兴趣；希望各位读者能细细品味数学竞赛中的美感，陶冶科学世界的情操。

第十二章 不抢分——抢分的最高境界

12.1 “抢分”的实质

本文的主体部分简要介绍了“抢分”的几种策略，包括通用的特殊值法、试探法，针对各种题型的特殊方法，以及骗过阅卷人的得分策略。有人会问，什么是“抢分”？

实质上，抢分就是在不会做的情况下如何尽可能发挥自身实力（所谓“超常发挥”），如何尽可能产生思路，如何尽可能将自己的思路表达出来，使阅卷人尽可能理解自己的思维过程，进而得到应得的分数。“抢分”表面上是“骗”，似乎是一种不正当手段；其实是“巧”，体现了我们解题的综合素质。“精彩的骗”，一个精彩的“抢分”手段，往往能使我们惊喜感叹，回味无穷。

“抢分”就像魔术，表面看上去十分神奇；但事实上揭开神秘的面纱，只是一些技巧的应用。通过熟练的练习，人人都能成为数学竞赛的“魔术师”。

下面回答文章开头的问题：平时的能力与考试的分数为什么经常不能吻合？其实很简单，不论是否学习过与本文类似的“抢分”手段，他们在解题过程中已将这些“抢分技巧”灵活运用。可以看到他们的试卷，几乎没有空白，似乎考试时实力很强，题目都解出来了。实际上，他们只是把自己的思维过程尽可能清晰的展现在卷面上，以得到“部分分”。所以，即使多数人不会做的难题，他们也能得上 10 分左右，再加上选择题、填空题的高分积累，这样最终分数，就高了不少。有些同学善于“交白卷”，不善于表达自己的思路，相当于自我放弃，不如奋力一搏。我们相信，只要有效“抢分”，总能在自己原有实力的基础上前进一大步。

12.2 调整心态，抢分的心理基础

综观近几年学生的高考等应试情况，有这么一种说法：“考试成绩发挥好不好，就看其心理素质好不好”。这种说法虽有失偏颇，但也不无道理。王极盛教授通过对考入北京大学的 51 个高考状元调查得出结果：在影响高考成绩的 20 个因素中，学习方法的重要性居第 3 位，学习基础的重要性居第 4 位，而考场心态的重要性居第 1 位，考前心态的重要性居第 2 位。可见，学生在高考前和考试中的心态居首要位置，学习策略、技巧和知识基础紧随其后。郑日昌教授认为，影响学生考试发挥的因素主要有知识因素、应试技巧和考试焦虑(心态)。叶平枝等人研究发现，高考落榜生和高考佼佼者的最大区别不是智力，而是心理素质。考试心理素质主要涉及考生的信心、情绪状态、焦虑水平和心态。我们认为，决定高考、竞赛成绩的因素为在勤奋和认知结构良好的条件下，提高成绩的关键在于考前和考试中的心理状态及学习策略和考试技巧水平。后几种因素水平高，能使考生提高 50 一 100 分，反之会降低 50 一 100 分，乃至考试失败。

根据学生参加考试的实际情况，考生心理状态存在以下四种：第一种，考前盲目自信状态。表现为外表看起来很兴奋，有时也好像很沉着，但对考试的困难和复杂性估计不足，相信能轻易取得成绩。第二种，考前过分紧张状态。表现为对考试兴奋过度，焦急不安等。第三种，考前信心不足状态。表现为情绪低落，反应迟钝，缺乏信心。第四种，战斗竞技状态。

表现为有良好的考试态度，并力争出好成绩。

1、考前心理准备

(1)动机适中，目标适宜，强化自信。

(2)克服考试焦虑，优化情绪状态。

(3)讲究学习策略，构建良好的认知结构。

2、积累应试经验，提高应试技巧

※仔细观察，迅速把握试卷全貌，认真审题

※善于试题类化，准确提取知识

※答题简明扼要，切忌画蛇添足

※不仅求快，更要求准

※利用第一印象，卷面可以得分

※能走就走一步，争取多得一分

※只要不倒扣分，不妨尝试回答

※重视复查环节，把好最后一关

※充分利用时间，不必提前交卷

※一旦走出考场，迅速转移注意

以上是本文发表前夕，国家教育部“阳光高考”的《高考考生与家长读本》摘录。事实上，不仅是高考需要良好的心理状态，竞赛同样如此。巧合的是，读本中很多思想与本文一致。笔者所在班级有很多同学有过类似的经历，学习好时反而考砸，学习差时反而考好。读者应该也有类似的感受。事实证明，心理因素在竞赛中的影响不容忽视。培养良好的心态，是“抢分”的心理基础。

12.3 如何做到“不抢分”

“抢分”的最高境界是“不抢分”。之所以这样说，是因为竞赛的成绩从根本上说，还是取决于自身努力、平时积累，只靠“抢分”的小聪明难以取胜。真正的高手，所有题都能严格解决，哪里用“抢分”？“抢分”，也只能使分数在实力基础上提高，而不能指望用“抢分”手段超过高水平选手。所以，笔者以真实的经验忠告读者，“抢分”技巧仅可用于考试，不可用于平时练习。

在平时练习中，无论遇到何种类型的题，请不要应用本文的“抢分”方法，不要养成“偷懒”的习惯，而要用数学方法加以严格证明。只有这样，才能提高自身的实力，真正学会各种数学思想方法，最终达到“不抢分”的最高境界。

在学习竞赛基础知识时，应注意知识的系统性。我们不妨问一个问题：对数函数在竞赛中有哪些应用？很多人可能一时语塞。实际上，对数函数无非关系到定义域、值域、单调性、凹凸性问题，而针对这些方面，又能分别从哪些角度命题，读者可以自行思考。

我们常常感叹巧妙的“构造”，殊不知这些构造正是在丰富的积累基础上得到的。

我们看到的“巧题妙解”，都是人类思想的结晶，而不是“骗”出来的。有很多解法巧妙的试题令人赞叹不已，这才是真正的水平，同学们应该学习这些真正巧妙的方法，不应满足于“抢分”。巧妙的构造，才是人类真正的思想结晶，是我们的终极追求。

最后，衷心祝愿同学们数学竞赛成绩势如破竹，节节拔高！

附录

附录 1　全国高中联赛大纲

在“普及的基础上不断提高”的方针指引下，全国数学竞赛活动方兴未艾，特别是连续几年我国选手在国际数学奥林匹克中取得了可喜的成绩，使广大中小学师生和数学工作者为之振奋，热忱不断高涨，数学竞赛活动进入了一个新的阶段。为了使全国数学竞赛活动持久、健康、逐步深入地开展，应广大中学师生和各级数学奥林匹克教练员的要求，特制定《数学竞赛大纲》以适应当前形势的需要。

本大纲是在国家教委制定的全日制中学“数学教学大纲”的精神和基础上制定的。《教学大纲》在教学日的一栏中指出：“要培养学生对数学的兴趣，激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性”。具体作法是：“对学有余力的学生，要通过课外活动或开设选修课等多种方式，充分发展他们的数学才能”，“要重视能力的培养……，着重培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，要使学生逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。同时，要重视培养学生的独立思考和自学的能力”。

《教学大纲》中所列出的内容，是教学的要求，也是竞赛的最低要求。在竞赛中对同样的知识内容的理解程度与灵活运用能力，特别是方法与技巧掌握的熟练程度，有更高的要求。而“课堂教学为主，课外活动为辅”是必须遵循的原则。因此，本大纲所列的课外讲授内容必须充分考虑学生的实际情况，分阶段、分层次让学生逐步地去掌握，并且要贯彻“少而精”的原则，这样才能加强基础，不断提高。

一试　全国高中数学联赛的一试竞赛大纲，完全按照全日制中学《数学教学大纲》中所规定的教学要求和内容，即高考所规定的知识范围和方法，在方法的要求上略有提高，其中概率和微积分初步不考。

二试　1、平面几何

基本要求：掌握初中数学竞赛大纲所确定的所有内容。

补充要求：面积和面积方法。

几个重要定理：梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理、西姆松定理。

几个重要的极值：到三角形三顶点距离之和最小的点—费马点。到三角形三顶点距离的平方和最小的点——重心。三角形内到三边距离之积最大的点—重心。

几何不等式。

简单的等周问题。

了解下述定理：

在周长一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的面积最大。

在周长一定的简单闭曲线的集合中，圆的面积最大。

在面积一定的 n 边形的集合中，正 n 边形的周长最小。

在面积一定的简单闭曲线的集合中，圆的周长最小。

几何中的运动：反射、平移、旋转。

复数方法、向量方法。

平面凸集、凸包及应用。

2、代数

在一试大纲的基础上另外要求的内容：

周期函数与周期，带绝对值的函数的图像。
三倍角公式，三角形的一些简单的恒等式，三角不等式。
第二数学归纳法。
递归，一阶、二阶递归，特征方程法。
函数迭代，求 n 次迭代，简单的函数方程。
n 个变元的平均不等式，柯西不等式，排序不等式及应用。
复数的指数形式，欧拉公式，棣美弗定理，单位根，单位根的应用。
圆排列，有重复的排列与组合，简单的组合恒等式。
一元 n 次方程（多项式）根的个数，根与系数的关系，实系数方程虚根成对定理。
简单的初等数论问题，除初中大纲中所包括的内容外，还应包括无穷递降法，同余，欧几里得除法，非负最小完全剩余类，高斯函数，费马小定理，欧拉函数，孙子定理，格点及其性质。

3、立体几何

多面角，多面角的性质。三面角、直三面角的基本性质。
正多面体，欧拉定理。
体积证法。
截面，会作截面、表面展开图。

4、平面解析几何

直线的法线式，直线的极坐标方程，直线束及其应用。
二元一次不等式表示的区域。
三角形的面积公式。
圆锥曲线的切线和法线。
圆的幂和根轴。

5、其它

抽屉原理。
容斥原理。
极端原理。
集合的划分。
覆盖。

附录 2　参考文献

谨向下列书籍资料作者致谢。部分文献可能未列出，一并感谢。

1.《中等数学》杂志，天津师范大学出版
2.《奥赛经典》系列，沈文选等，湖南师范大学出版社
3.《走向 IMO》系列，国家集训队教练组，华东师范大学出版社
4.《历届 IMO 试题集》，刘培杰著，哈尔滨工业大学出版社
5.《微积分》，同济大学应用数学系，高等教育出版社
6.《初等数论》，潘承洞、潘承彪著，北京大学出版社
7.《国际竞赛平面几何试题》，刘培杰著，哈尔滨工业大学出版社
8.《数学竞赛培优教材—专题分册》，马兵主编，张利民著
9.《数学奥林匹克竞赛丛书》，中国科学技术大学出版社
10.《数学奥林匹克小丛书》，华东师范大学出版社
11.《世界数学奥林匹克解题大辞典》

12.《数学奥林匹克优化解题题典》
13.《具体数学—计算机科学基础》
14.《物理学难题 200 道》，北京理工大学出版社
15.南大附中 2008 东南数学奥林匹克培训资料
16. 1999-2009 信息学竞赛国家集训队论文
17.《算法艺术与信息学竞赛》，刘汝佳、黄亮著
18.博杰学习网 http://boj.pp.ru/
19.数之理论坛 http://boj.5d6d.com/

附录 3　作者简介

李博杰，男，河北石家庄人，生于 1992 年 11 月 27 日。就读于石家庄二中 2007 级省级理科实验班，参加数学、信息学竞赛。

2004 年第九届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛总决赛金牌（全国第八名）
2004 年石家庄市第九届“十佳金童”称号
2004 年“我爱数学”夏令营数学竞赛一等奖、计算竞赛一等奖
2005 年第十届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛二等奖
2006 年“希望杯”数学竞赛初二组银牌
2006 年 NOIP 普及组省一等奖（满分）
2007 年中考以全市前十名（不含优惠分）考入石家庄二中
2008 年 NOIP 提高组省一等奖（全省第二名）
2008 年全国高中数学联赛省二等奖
2008 年全国中学生物理竞赛省三等奖
2009 年科技创新竞赛石家庄市二等奖
2009 年全国信息学竞赛（NOI）铜牌（三等奖）
2009 年全国高中数学联赛省一等奖（全省前十名）

版权声明

感谢

感谢祖父母、父母对我的养育和教导；感谢石家庄二中对我的支持；感谢雷老师、刘老师、靳老师、潘老师、蔡老师等教师对我的培养；感谢包括数学竞赛小组在内的广大同学对我的支持与帮助。

感谢关心、支持《数学奥林匹克中的应试技巧》的读者朋友。由于水平有限，错误、疏漏在所难免，恳请读者指正，我们会再版时更正。欢迎就本书提出意见建议、提供帮助支持，如方法、例题、对“抢分”的见解等，我们会再版时添加。